



VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

EKONOMICKÁ FAKULTA

KATEDRA FINANCÍ

Ověření možnosti odhadu pravděpodobnosti defaultu vybraných společností na základě  
Mertonova modelu

(Verification of the Default Probability Estimation Possibility of the Selected Companies via  
Merton model)

Student: Bc. Lucie Vítková

Vedoucí diplomové práce: Ing. Petr Gurný, Ph.D.

Ostrava 2015

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Ekonomická fakulta  
Katedra financí

## Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Lucie Vítková**

Studijní program: N6202 Hospodářská politika a správa

Studijní obor: 6202T010 Finance

Téma: **Ověření možnosti odhadu pravděpodobnosti defaultu vybraných společností na základě Mertonova modelu**  
**Verification of the Default Probability Estimation Possibility of the Selected Companies via Merton Model**

Zásady pro vypracování:

1. Úvod
  2. Popis metodiky odhadu pravděpodobnosti defaultu
  3. Popis a analýza vstupních dat
  4. Odhad pravděpodobnosti defaultu u vybraných společností
  5. Závěr
- Seznam použité literatury  
Seznam zkratk  
Prohlášení o využití výsledků diplomové práce  
Seznam příloh  
Přílohy

Seznam doporučené odborné literatury:

JONES, Stewart and David A. HENSHER. *Advances in Credit Risk Modelling and Corporate Bankruptcy Prediction: Quantitative Methods for Applied Economics and Business Research*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. ISBN 978-0-521-68954-0.

LANDO, David. *Credit Risk Modeling: Theory and Applications*. Princeton: Princeton University Press, 2004. ISBN 0-691-08929-9.

LÖFFLER, Gunter and Peter N. POSCH. *Credit risk modeling using Excel and VBA*. Chichester: John Wiley & Sons, 2007. ISBN 978-0-470-03157-5.


Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.


Vedoucí diplomové práce: **Ing. Petr Gurný, Ph.D.**

Datum zadání: 21.11.2014

Datum odevzdání: 25.04.2015



  
Ing. Iveta Ratmanová, Ph.D.  
vedoucí katedry

  
prof. Dr. Ing. Dana Dluhošová  
děkanka fakulty

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem celou práci, včetně všech příloh, vypracovala samostatně. Přílohy č. 1 a 2 dané mi k dispozici, jsem samostatně doplnila.

V Ostravě dne

20.4.2015

  
.....

Bc. Lucie Vítková

The thesis is based on research activities sponsored through GACR Project No. P403/14-15175P. The support is greatly acknowledged.

## Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod .....</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Popis metodiky odhadu pravděpodobnosti defaultu .....</b>	<b>6</b>
2.1	<i>Kreditní riziko.....</i>	6
2.1.1	Obecné vymezení pojmu riziko a možné způsoby dělení rizik .....	6
2.1.2	Charakteristika kreditního rizika.....	8
2.1.3	Credit-scoring modely .....	10
2.1.4	Strukturální modely .....	12
2.1.5	Reduced-form modely .....	13
2.2	<i>Mertonův model.....</i>	14
2.2.1	Podstata a předpoklady užití Mertonova modelu.....	14
2.2.2	Pravděpodobnost defaultu.....	15
	Black-Scholesova formule .....	16
2.2.3	Rozšíření a vývoj původního Mertonova modelu.....	18
2.2.4	Optimalizace dluhu .....	20
2.3	<i>Predikce.....</i>	21
2.3.1	Simulační metoda Monte Carlo .....	22
2.3.2	Stochastické procesy .....	23
	Wienerův proces .....	24
	Brownovy procesy .....	24
	Lévyho procesy.....	27
2.3.3	Techniky snížení chyby odhadu.....	32

<b>3</b>	<b>Popis a analýza vstupních dat .....</b>	<b>35</b>
3.1	<i>Data využitá pro výpočet historické pravděpodobnosti defaultu .....</i>	<i>35</i>
3.1.1	Česká republika .....	35
3.1.2	Polsko .....	36
3.1.3	Německo .....	36
3.1.4	USA .....	37
3.2	<i>Data využitá pro predikci .....</i>	<i>37</i>
<b>4</b>	<b>Odhad pravděpodobnosti defaultu u vybraných společností.....</b>	<b>39</b>
4.1	<i>Odhad pravděpodobnosti defaultu za rok 2013 .....</i>	<i>39</i>
4.1.1	Implementace Mertonova modelu .....	39
4.1.2	Grafické srovnání .....	42
4.1.3	Optimalizace dluhu .....	46
4.1.4	Shrnutí poznatků o použitelnosti Mertonova modelu při výpočtu PD.....	48
4.2	<i>Predikce vývoje pravděpodobnosti defaultu u vybraných společností .....</i>	<i>49</i>
4.2.1	Procesy a stratifikace .....	49
4.2.2	Srovnání výsledků dosažených pomocí GBM a VG procesu .....	52
4.2.3	Predikce pravděpodobnosti defaultu .....	53
4.2.4	Srovnání výsledků při predikci pravděpodobnosti defaultu .....	54
4.2.5	Shrnutí poznatků o kvalitě jednotlivých procesů a provedené predikci .....	61
<b>5</b>	<b>Závěr .....</b>	<b>64</b>
	<b>Seznam použité literatury .....</b>	<b>66</b>

<b>Seznam zkratek.....</b>	<b>71</b>
----------------------------	-----------



# 1 Úvod

Veškeré rozhodování ve všech oblastech je ovlivněno rizikem. Vnímání rizika a zkoumání důsledků jeho vlivu je důležité především ve finančním řízení a plánování. Zejména v souvislosti s nedávnou finanční krizí společnosti po celém světě vyhledávají možnosti a prostředky, jak objektivně posuzovat, řídit a snižovat kreditní riziko. V této oblasti bylo provedeno mnoho výzkumů a bylo vyvinuto mnoho modelů a metod ke zjišťování skutečného stavu, ve kterém se společnosti nachází, a k měření kreditního rizika. Jedním z nejvýznamnějších modelů je Mertonův model publikovaný Robertem Mertonem. Merton sám vycházel z poznatků a práce Fishera Blacka a Myrona Scholese, kteří k vytvoření modelu přispěli především svým novým náhledem na teorii oceňování opcí. Mertonův model samotný je založený na kvantifikaci kreditního rizika prostřednictvím pravděpodobnosti defaultu, tedy pravděpodobnosti, s jakou hodnota aktiv klesne pod určitou hranici a daná společnost bude v úpadku.

Cílem diplomové práce je ověřit aplikovatelnost Mertonova modelu na reálných datech při určování a predikci pravděpodobnosti defaultu u vybraných společností. Cíl práce lze rozložit do dvou oblastí. První oblastí je implementace samotného Mertonova modelu na data vybraných společností a zjišťování zda je možné model využít při určování pravděpodobnosti defaultu, potažmo zda jej lze využít k řízení kreditního rizika společnosti. Druhou oblastí je pak ověření možnosti predikce pravděpodobnosti defaultu pomocí Mertonova modelu, přičemž budou navzájem srovnány predikce provedené na základě rozdělení pravděpodobnosti modelovaného pomocí Geometrického Brownova procesu a na základě rozdělení pravděpodobnosti modelovaného pomocí Variance Gamma procesu.

Diplomová práce je tvořena pěti kapitolami, včetně úvodu a závěru.

Ve druhé kapitole diplomové práce bude nejprve charakterizováno kreditní riziko, poté postupy jeho měření, přičemž blíže bude rozveden Mertonův model a výpočet pravděpodobnosti defaultu. Dále budou přiblížena specifika predikce na bázi vybraných procesů a budou doplněny i techniky snižování chyb odhadu. V této části budou popsány veškeré metodické poznatky, vzorce a vztahy nezbytné k provedení výpočtů a použití vybraných metod.

Třetí kapitola diplomové práce bude zaměřena na popis dat, uvedení jejich zdrojů a charakteristik. Kapitola bude rozdělena na dvě části, a to podle okruhů výpočtů.

Čtvrtou kapitolou diplomové práce bude část aplikační, která se bude zabývat rozborem postupu výpočtů dle vztahů uvedených v druhé kapitole. Součástí je prezentace a vysvětlení výsledků, které jsou následně zhodnoceny. Tato kapitola (stejně jako třetí) bude rozdělena na dvě části, kdy první se bude týkat pouze výpočtu historické pravděpodobnosti defaultu na základě Mertonova modelu a druhá simulacemi na základě vybraných procesů, které budou sloužit jako podklad pro provedení predikcí pravděpodobností defaultu opět na základě Mertonova modelu.

Poslední kapitolou bude závěr, kde bude celá práce zhodnocena a budou uvedena možná další rozšíření daného tématu.

## 2 Popis metodiky odhadu pravděpodobnosti defaultu

Druhá kapitola je rozdělena na tři podkapitoly. V první podkapitole je vymezen obecný pojem riziko a následně jsou uvedeny základní charakteristiky, metody měření a modely kreditního rizika. V druhé podkapitole je blíže specifikován Mertonův model a jsou uvedeny metodické souvislosti výpočtu pravděpodobnosti defaultu. Třetí podkapitola je věnována predikci, přičemž jsou blíže charakterizovány metoda Monte Carlo, stochastické procesy a metody snížení chyby odhadu.

### 2.1 Kreditní riziko

V podkapitole 2.1 budou využívány poznatky z publikací Bluhm, Overbeck a Wagner, (2010); Jones a Hensher (2008), Dluhošová (2010).

#### 2.1.1 Obecné vymezení pojmu riziko a možné způsoby dělení rizik

Veškeré rozhodování v reálném životě je vždy ovlivněno rizikem. Pokud by tomu tak nebylo a budoucí jevy by bylo možné zcela předvídat, jednalo by se o stav zvaný určitost. Pojmem riziko lze tedy vyjádřit situaci, kdy existuje možnost, že se očekávané výsledky budou odlišovat od předpokládaných výsledků, a nelze tedy s jistotou předpovědět budoucí stav věcí. Riziko je často chybně ztotožňováno s dalším pojmem, kterým je nejistota. U rizika (na rozdíl od nejistoty) je však možné určitým způsobem vyčíslit pravděpodobnost, s jakou mohou nastat jednotlivé alternativy - je tedy možné danou budoucí situaci popsat pomocí rozdělení pravděpodobnosti. U nejistoty nelze popsat budoucí situaci rozdělením pravděpodobnosti, nýbrž prostřednictvím intervalů.

Riziko samotné lze rozdělit dle několika kritérií. První kritérium rozdělení je dle závislosti na příčinách, které dané riziko vyvolaly:

- vnější příčiny,
- vnitřní příčiny.

Rizika vyvolaná *vnějšími příčinami* jsou tzv. *objektivní rizika*. Tato objektivní rizika nejsou závislá na ekonomické činnosti společnosti, na zaměstnancích, na schopnostech a práci podnikového managementu ani na chování daného subjektu. Mezi tato rizika lze řadit např. *přírodní* (živelné pohromy), *ekonomické změny makroekonomického charakteru* (změny devizových kurzů, inflace, změny v daňovém systému, aj.), *institucionální změny* (legislativa

obcí, zásahy nebo akce nejrůznějších institucí, aj.), *politické události* (změny režimu, pád vlády) a *sociálně-patologické vlivy* (terorismus, náboženské konflikty, aj.).

Naproti tomu rizika související s *vnitřními příčinami* lze označit jako tzv. *rizika subjektivní*. Tato rizika jsou úzce propojena s danou společností, podnikem a jejich fungováním. Subjektivními riziky jsou kupř. riziko *managerské* (rozhodování managementu či vlastníků), *provozní* (porucha výrobní linky, odcizení zásob ze skladu), *investiční* (nerentabilní investiční rozhodnutí, nesprávné umístění volných zdrojů), *inovační* (riziko vstupu nového výrobku na trh), *finanční* a *obchodní* (dodavatelsko-odběratelské vztahy, slevové akce, aj.).

Současným působením vnějších a vnitřních rizik mohou vznikat tzv. *kombinovaná rizika*. Změní se např. daňový systém a správa daní, ale podnik nezareaguje včas (nepošle zaměstnance daňového a účetního oddělení na školení) a není schopný se vzniklé změně přizpůsobit (promešká lhůty a musí zaplatit sankce).

Druhým z kritérií je závislost na celkovém ekonomickém vývoji. Dle tohoto kritéria je riziko děleno následovně:

- riziko systematické (tržní),
- riziko nesystematické (jedinečné).

*Riziko systematické (tržní)* je charakteristické tím, že jeho působením jsou ovlivněny všechny společnosti v dané ekonomice. Pod tímto rizikem je možné si představit kupř. změny v daňovém systému, změny úroků, inflace, politická nejednota či nejistota v zemi, apod. Proti tomuto riziku se nelze bránit. *Riziko nesystematické (jedinečné)* je spojeno s jednotlivými obory, společnostmi, projekty a je velmi specifické. U společnosti, která těží uhlí, může jít např. o pokles poptávky po uhlí nebo riziko důlního závalu, u strojírenské společnosti může dojít k zastarání výrobních technologií, aj. Nesystematické riziko lze snížit diverzifikací.

Dále je možné rizika dělit dle možnosti ovlivňování:

- rizika ovlivnitelná,
- rizika neovlivnitelná.

*Rizika ovlivnitelná* lze snížit prostřednictvím ovlivňování příčin jejich vzniku. Např. riziko odcizení či zničení lze snížit pomocí bezpečnostních zařízení, riziko vzniku pracovních úrazů pomocí pravidelných školení personálu a poučení o bezpečnosti práce, atd. U *rizik*

*neovlivnitelných* lze zmírnit pouze nepříznivé důsledky, nikoli však riziko samotné. Jedná se zejména o riziko politické, náboženské, dále o daňové podmínky, legislativní rámec, apod.

### 2.1.2 Charakteristika kreditního rizika

Z hlediska modelování a řízení rizik ve společnostech je důležité zejména výše zmíněné riziko finanční. Riziko finanční lze dále dělit na tržní, operační a kreditní. A právě riziko kreditní bude dále podrobněji rozebráno.

Kreditní riziko obecně je spojeno s neschopností subjektu dostát svým závazkům včas a v plné výši. Může jít např. o situaci, kdy emitent dluhopisu není schopen vyplatit držiteli dluhopisu kuponové platby nebo navrátit nominální hodnotu dluhopisu, nebo dlužník není schopen splácet úroky ani řádné splátky úvěru, apod. Lze jej také definovat jako možnost vzniku ztráty investora.

Zde je konkrétně kreditní riziko spjato s defaultem, bankrotem určité společnosti. Jedná se tedy o situaci, kdy hodnota dluhu dané společnosti převyšuje hodnotu jejích aktiv.

Kreditní riziko je v dnešní době vyjadřováno pomocí tzv. *ratingu*. Pojem rating je spojen s důvěryhodností, kredibilitou dlužníka a investorům je jeho prostřednictvím poskytnuta určitá informace o stavu a spolehlivosti daného subjektu. Rating je subjektům udělován ratingovými společnostmi na základě důkladného šetření. Po celém světě jsou používány ratingové stupnice tří nejznámějších ratingových agentur, kterými jsou S&P (Standard & Poor's), Moody's a Fitch. Rating je rozlišován v základě na dva druhy, a to krátkodobý a dlouhodobý. V rámci obou jsou rozlišovány investiční stupeň a spekulativní stupeň. Investiční stupeň je pro investora určitou zárukou návratnosti. U spekulativního stupně je nebezpečí selhání dlužníka vysoké a návratnost nízká. Ratingové stupnice jsou obsahem přílohy č. 1.

Měření kreditního rizika je prováděno v podstatě na základě dvou modelových přístupů (Anson, 2004):

- top-down přístup,
- bottom-up přístup.

*Top-down* přístup má sloužit k měření celkového rizika, a to ať už odvětví, společnosti či portfolia. U tohoto přístupu není snaha rozčlenit celkové riziko na jednotlivé dílčí faktory (tedy na kreditní, tržní a operační riziko). V zásadě je sledována historická volatilita aktiv nebo cash-

flow a analyzována kapitálová vybavenost podobných, srovnatelných podniků. Na základě řízení kapitálu je pak korigováno celkové riziko. Přístup je vhodnější pro využití v nefinančních institucích.

U *bottom-up* přístupu je nejdůležitější separace kreditního rizika od rizika tržního a operačního. Specifikem tohoto přístupu je rozlišování různé kvality a rizikovosti instrumentů. Na základě toho je pak kreditní riziko určováno pro různé úrovně dluhu (rozdíl je mezi úvěrem, státními dluhopisy, junk bonds, apod.). Bottom-up přístup je využíván převážně u bank a ostatních finančních institucí.

Kreditní riziko samotné je určeno řadou parametrů. Tyto parametry jsou využívány ke kvantifikaci a predikování kreditního rizika (Bluhm, Overbeck, Wagner, 2010):

- Loss Given Default (LGD),
- Probability of Default (PD),
- Exposure at Default (EAD),
- Maturity (M).

*Loss Given Default* (LGD) je parametrem vyjadřovaným buďto v peněžním nebo (což je i častější) v procentuálním vyjádření. Jde tedy o ztrátu v procentuálním vyjádření, pokud u dlužníka dojde k defaultu.

*Probability of Default* (PD) neboli pravděpodobnost defaultu lze vysvětlit jakožto pravděpodobnost, že daný dlužník nebude schopen úhrady svých závazků ve správné výši a ve stanovené lhůtě.

*Exposure at Default* (EAD) je překládáno jako riziková expozice. Pojem expozice je spojen s vystavením určité věci riziku. EAD je zde spojen s objemem majetku, aktiv, které jsou ohroženy rizikem, pokud dlužník není schopen úhrady svých závazků.

*Maturity* (M) – maturita či doba splatnosti souvisí s úhradou závazků dlužníkem. Jde o dobu, v níž je nezbytně nutné, aby dlužník své závazky uhradil.

Klíčovým parametrem, pomocí něž bude kreditní riziko kvantifikováno a následně predikováno, je pravděpodobnost defaultu. Pravděpodobnost defaultu lze vyčíslit na základě tří základních typů modelů. Jedná se o:

- credit-scoring modely,
- strukturální modely,
- reduced-form modely.

### 2.1.3 Credit-scoring modely

Credit-scoring modely jsou jednorozměrné či vícerozměrné, především na účetních datech založené modely. Velmi zjednodušeně lze říci, že u jednorozměrných modelů je sestavena skupina ukazatelů, které lze vyčíslit převážně na základě účetních údajů dané společnosti a ty jsou pak následně porovnány s hodnotami stejných ukazatelů vyčíslených pro daný průmyslový obor či odvětví. U vícerozměrných modelů jsou ukazatele navíc doplněny o určité váhy, které lze interpretovat jakožto relativní důležitost daného ukazatele při výpočtu finálního skóre. Skóre je poté porovnáváno se skupinou benchmarků, které dávají informace o stavu a výkonnosti hodnocené společnosti.

Credit-scoring modely jsou přístupem ke zjištění pravděpodobnosti defaultu na základě využití statistických a ekonometrických metod. Mezi nejvýznamnější přístupy lze dle Jonese a Henshera (2008) zařadit diskriminační analýzu, discrete choice modely (logit a probit modely využívající regresní analýzu) či neparametrické metody (neuronové sítě).

#### Altmanovo Z-Score

Nejvýznamnějším credit-scoring modelem je Altmanovo Z-Score. Původní model byl poprvé publikován v roce 1968. Jedná se o model jednorozměrný, a tedy predikce je provedena pouze pro jeden rok. Dle kritéria obchodovatelnosti akcií jsou rozlišovány dvě základní verze (Dluhošová, 2010). Pro kótované společnosti je vztah následující:

$$Z = 1,2 \cdot X_1 + 1,4 \cdot X_2 + 3,3 \cdot X_3 + 0,6 \cdot X_4 + 1,0 \cdot X_5,$$

kde  $Z$  označuje skóre,  $X_1$  podíl pracovního kapitálu a celkových aktiv,  $X_2$  podíl nerozděleného zisku a celkových aktiv,  $X_3$  podíl zisku před úroky a daněmi a celkových aktiv,  $X_4$  podíl tržní ceny akcií k celkovým dluhům a  $X_5$  podíl celkových tržeb k celkovým aktivům. Pokud je  $Z > 2,99$ , jde o podniky dobré s minimální pravděpodobností úpadku. Pokud je  $Z < 1,81$ , existuje vysoká pravděpodobnost úpadku dané společnosti. U intervalu  $1,81 \leq Z \leq 2,99$ , tzv. *šedé zóny*, je obtížné určit pravděpodobnost úpadku.

Pro společnosti, které nejsou kótované na burze nebo nejsou vůbec společnostmi akciovými lze využít následující verzi:

$$Z' = 0,717 \cdot X_1 + 0,847 \cdot X_2 + 3,107 \cdot X_3 + 0,420 \cdot X_4 + 0,998 \cdot X_5,$$

kde jednotlivé proměnné mají stejný význam jako u vzorce pro společnosti kótované na burze. Jedinou změnou je obsahová náplň proměnné  $X_4$ , která zde představuje poměr účetní hodnoty vlastního kapitálu k celkovým dluhům. Pokud je  $Z' > 2,90$ , jde o podnik s velmi malou pravděpodobností úpadku. Při  $Z' < 1,20$  se jedná o společnosti s velkou pravděpodobností úpadku. Interval  $1,20 \leq Z' \leq 2,90$  představuje šedou zónu.

Další rozšíření Altmanova modelu je z roku 1995, které je použitelné pro nevýrobní společnosti a rozvíjející se trhy. Model má následující tvar:

$$Z'' = 6,56 \cdot X_1 + 3,26 \cdot X_2 + 6,72 \cdot X_3 + 1,05 \cdot X_4.$$

U tohoto modelu jsou společnosti silné s nízkým rizikem úpadku ve skupině  $Z'' > 2,6$ . Podniky slabé s vysokou pravděpodobností úpadku ve skupině  $Z'' < 1,1$  a interval pro podniky v šedé zóně je  $1,1 \leq Z'' \leq 2,6$ .

## ZETA Modely

Zástupcem vícerozměrných credit-scoring modelů jsou tzv. *ZETA modely*. Tyto modely jsou určeny pro předpovědi na pět let. Jejich vývojovým stupněm jsou *Z-metrics modely*, které profesor Altman vytvořil ve spolupráci se skupinou RiskMetrics. Modely jsou použitelné pro celou řadu podniků a využívají ukazatele ze tří oblastí – finanční analýza, kapitálový trh a makroekonomická sféra. Jejich vytvoření bylo reakcí na hospodářskou krizi a určitou snahou o lepší predikci kreditního rizika. U těchto modelů je již přímo vyčíslena pravděpodobnost defaultu.

Kreditní skóre se určí dle následujícího vztahu:

$$CS_i = \alpha + \sum \beta_j \cdot X_{i,j},$$

kde  $CS_i$  je hodnota ratingového (kreditního) skóre  $i$ -té společnosti,  $\alpha$  úrovněová konstanta,  $\beta_j$  koeficient  $j$ -té proměnné a  $X_{i,j}$  hodnota  $j$ -té proměnné  $i$ -té společnosti.

Samotná hodnota pravděpodobnosti úpadku  $i$ -té společnosti  $PD_i$  je určena jako:



$$PD_i = \frac{1}{1 + EXP(CS_i)}.$$

#### 2.1.4 Strukturální modely

Modely strukturální jsou dle vztahu k oceňování aktiv založeny na teorii oceňování opcí. Název strukturální je odvozen od zkoumání struktury kapitálu společnosti, jejíž rozlišení je pro tyto modely podstatné. Vývoj těchto modelů byl umožněn až vytvořením a rozvojem metodologie oceňování opčních kontraktů, se kterou přicházejí Fischer Black, Myron Scholes a Robert Merton. Základní myšlenkou strukturálních modelů je fakt, že default společnosti nastává, pokud hodnota aktiv „spadne“ pod pomyslnou hranici, která je dána velikostí dluhu. Tato myšlenka vychází z:

$$A = E + L, \tag{2.1}$$

kde  $A$  představuje hodnotu aktiv,  $E$  hodnotu vlastního kapitálu společnosti a  $L$  hodnotu dluhu.

V podstatě lze výše uvedený vztah vysvětlit tak, že výplatu, která plyne akcionářům z vlastnictví společnosti, je možné ztotožnit s výplatou, kterou by dostali v případě, když by zakoupili opci na hodnotu firmy s realizační cenou, která je dána velikostí nesplaceného dluhu.

Při použití modelů strukturálních jsou akceptována nejen data účetní, ale i data tržní, která jsou získávána prostřednictvím kapitálových trhů. Zde však modely naráží na některé předpoklady, které nejsou reálně splnitelné a musí tak být ošetřeny určitými zjednodušeními. Nejdůležitějším předpokladem je efektivnost fungování kapitálových trhů, kdy jsou veškeré informace ihned promítnuty do tržních cen a všichni účastníci mají stejné (a stejně kvalitní) informace. Ve skutečnosti je však možnost efektivního fungování trhů značně omezena, a to v důsledku nižší rozvinutosti trhů, než jaká by pro tyto úvahy byla potřebná. Dle výše uvedených poznatků lze tedy říci, že strukturální modely nejsou již (na rozdíl od credit-scoring modelů) postaveny na predikci a sledování peněžních toků či zisků dané společnosti, ale naopak je největší váha přisuzována aktuálním tržním datům.

Nejvýznamnějším zástupcem skupiny strukturálních modelů je Mertonův model. Tento model a jeho modifikace budou podrobněji rozebrány v podkapitole 2.2.

### 2.1.5 Reduced-form modely

Výchozím předpokladem u reduced-form modelů je skutečnost, že samotný default společnosti se objeví překvapivě, nenadále. Čas defaultu společnosti je zde tedy chápán jako exogenní veličina. Reduced-form jsou modely nazývány proto, že jejich prostřednictvím lze zredukovat velmi složitý a komplexní mechanismus posuzování a zjišťování úpadku do jednodušší podoby. Reduced-form modely vycházejí z Mertonova modelu a často jsou označovány jako jeho zobecnění. Použitím těchto modelů je možné při výpočtu pravděpodobnosti defaultu stavět na tržních datech a zároveň splnit podmínku nemožnosti arbitráže. Reduced-form modely jsou alternativou vycházející z tzv. „*hazard rate*“ modelových přístupů, které se ve finančním řízení začaly objevovat od 80. let 20. století. Hazard rate je také volně překládána jako intenzita či síla defaultu.

Ve srovnání se strukturálními modely mají reduced-form modely hned několik odlišností, např. u strukturálních modelů se předpokládá, že default může nastat pouze v době zralosti, maturity, kdežto u reduced-form modelů může default nastat kdykoli. Jinou odlišností je, že u strukturálních modelů se uvažuje s jedním druhem dluhu (stálá kapitálová struktura) po celou dobu životnosti společnosti. Naopak u reduced-form modelů je brána v potaz skutečnost, že dluhy jsou v průběhu životnosti nahrazovány a refinancovány.

Prvním modelem tohoto druhu byl tzv. *Jarrow-Turnbull model* (viz Jarrow a Turnbull, 1995). Tento model byl postaven na výchozím předpokladu náhodnosti defaultu (autoři jej popisují jakožto náhodný statistický proces), avšak samotná pravděpodobnost defaultu byla označována za nenáhodnou, na čase závislou funkci. Kompletní metodiku a vztahy lze najít např. v práci Frühwirtha a Sögnera (2001), kteří testovali využití modelu na podmínkách německého kapitálového trhu.

Tento původní model prošel řadou inovací a rozšíření, z nichž nejvýznamnějším byl vznik tzv. *Jarrowova modelu* (viz Jarrow, 2001). U tohoto modelu (na rozdíl od původního z roku 1995) je již pravděpodobnost defaultu brána jako náhodná veličina, která explicitně vychází z náhodných úrokových sazeb a rizikových faktorů, které se vyvíjejí pomocí log-normálního rozdělení. Model tedy posuzuje nejen charakteristiku dané společnosti, ale bere v potaz i exogenní faktory, které na společnost působí z vnějšku (např. ceny ropy u energetických společností, aj.).

## 2.2 Mertonův model

Mertonův model, jak již bylo řečeno výše, je strukturální model, pomocí něhož je možné kvantifikovat pravděpodobnost defaultu vybrané společnosti. A právě použitelnost tohoto modelu v reálných podmínkách bude dále ověřována.

Základní poznatky, na které bude volně navázáno, vycházejí z publikací Zmeškal (2013), Tichý (2010), Benito, Glavan a Jacko (2005), Elizalde (2006), Löffler a Posch (2007), Sundaresan (2013), Altman a Saunders (1998), Tudela a Young (2003), Hull, Nelken a White (2004).

### 2.2.1 Podstata a předpoklady užití Mertonova modelu

Základy pro Mertonův model byly položeny v roce 1973 v práci Blacka a Scholese zabývající se oceňováním opcí. Právě z jejich poznatků vycházela práce Roberta Mertona, ve které je tržní hodnota vlastního kapitálu chápána jako evropská call opce na firemní aktiva. Ve (2.2) je zobrazeno matematické vyjádření výplatní funkce této call opce.

$$E_T = \max(0, A_T - L), \quad (2.2)$$

kde  $E_T$  je tržní hodnota vlastního kapitálu v čase  $T$ ,  $A_T$  tržní hodnota aktiv společnosti v čase  $T$  a  $L$  nominální hodnota dluhu. Podkladovým aktivem jsou tedy aktiva společnosti a realizační cena call opce je velikost dluhu  $L$ .

Dle Löfflera a Posche (2007) lze původní Mertonův model vyložit níže popsáním způsobem. Společnost má určitý objem vlastního kapitálu a dluhů. Dluhy jsou v modelu zastoupeny zero bondem s nominální hodnotou  $L$  a okamžikem splatnosti (maturitou)  $T$ . Je nutné zmínit, že až do okamžiku  $T$  nejsou vlastníkům vyplaceny dividendy. Jde tedy o to, že akcionáři v podstatě čekají až do okamžiku splatnosti  $T$ , kdy se teprve rozhoduje o defaultu dané společnosti. Pokud by totiž default společnosti nastal dříve než v okamžiku  $T$ , přišli by o možnou prémii v podobě zvýšení hodnoty aktiv společnosti. Dle (2.1) lze tedy vyjádřit pravděpodobnost defaultu, jako pravděpodobnost, že hodnota aktiv společnosti v okamžiku  $T$  bude nižší než hodnota  $L$ . V tomto případě je věřitelům vyplacena celková hodnota aktiv a akcionářům není vyplaceno nic.

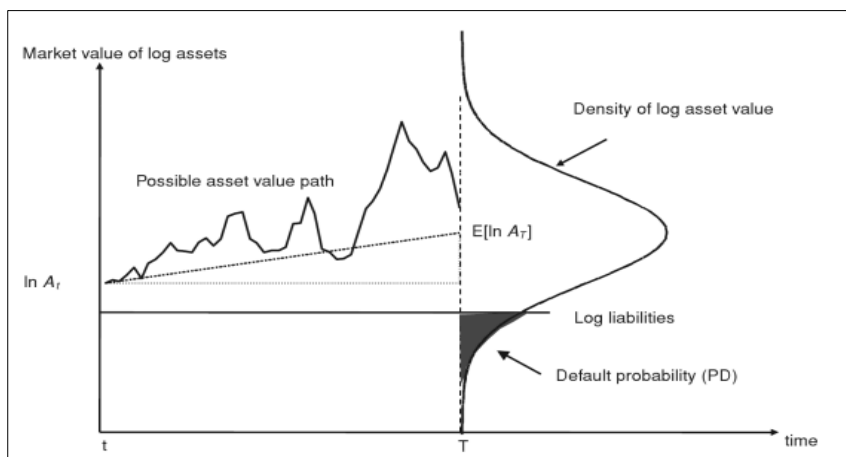
Aby model mohl fungovat, jak bylo výše popsáno, a mohl být použitelný v praxi, je nutné vymezit základní zjednodušující předpoklady:

- v modelu nejsou brány v potaz transakční náklady, zdanění a ani nedělitelnost aktiv,
- existuje skupina investorů, kteří jsou přesvědčeni o tom, že mohou nakupovat a prodávat za tržní ceny tolik aktiv, kolik chtějí, a všichni tito investoři oplývají zhruba stejnou velikostí bohatství,
- úrokové míry pro zápůjčky a výpůjčky jsou shodné,
- aktiva společnosti se vyvíjejí pomocí log-normálního rozdělení - logaritmus hodnoty aktiv má normální rozdělení,
- v modelu je umožněn krátký prodej,
- obchodování s aktivy probíhá kontinuálně,
- v modelu platí MM teorém – hodnota podniku se nemění v závislosti na struktuře dluhu, a tedy není rozlišováno mezi různými druhy dluhů,
- default společnosti nastane vždy, a tento stav je jistý.

### 2.2.2 Pravděpodobnost defaultu

Na základě těchto podmínek lze pravděpodobnost defaultu v Mertonově modelu zachytit následujícím způsobem obr. 2.1

Obr. 2.1: Pravděpodobnost defaultu v Mertonově modelu



Zdroj: Löffler a Posch (2007, p. 28)

Na základě výše uvedeného obr. 2.1 lze vysvětlit následující vztah:

$$\ln A_T \approx N\left(\ln A_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T - t), \sigma^2 \cdot (T - t)\right), \quad (2.3)$$

kde  $\ln A_T$  představuje logaritmus očekávané hodnoty aktiv v okamžiku splatnosti  $T$ ,  $\ln A_t$  logaritmus očekávané hodnoty aktiv v den  $t$ ,  $\mu$  empirická střední hodnota (nebo také drift),  $\sigma^2$

rozptyl,  $T$  okamžik splatnosti a  $t$  náhodný den. Po určení logaritmu hodnoty aktiv a doplnění proměnných do (2.4), který platí pro proměnné z normálního rozdělení, lze vyčíslit pravděpodobnost defaultu jako (2.5):

$$\Phi\left[\frac{z - E[x]}{\sigma(x)}\right], \quad (2.4)$$

kde  $\Phi$  je kumulativní funkce normálního normovaného rozdělení,  $z$  limitní, hraniční hodnota,  $E[x]$  střední hodnota proměnné  $x$  a  $\sigma(x)$  směrodatná odchylka od střední hodnoty proměnné  $x$ .

$$PD = \Phi\left[\frac{\ln L - \ln A_t - (\mu - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right]$$

$$PD = \Phi\left[\frac{\ln(L / A_t) - (\mu - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right], \quad (2.5)$$

kde  $PD$  je označením pro pravděpodobnost defaultu, a tedy určuje pravděpodobnost, s jakou bude hodnota aktiv v době  $T$  nižší než hodnota  $L$ . Pravděpodobnost defaultu lze na základě Mertonova modelu vypočítat skrze tzv. *Distance to Default* ( $DD$ ).  $DD$  prakticky říká, jak vzdálená (o kolik směrodatných odchylek) je očekávaná hodnota aktiv  $A_T$  od defaultu (2.6).

$$DD = \frac{\ln A_t + (\mu - \sigma^2 / 2)(T - t) - \ln L}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad (2.6)$$

kdy  $\Rightarrow PD = \Phi[-DD]$ .

### Black-Scholesova formule

Prvním nedostatkem tohoto přístupu je fakt, že k výpočtu pravděpodobnosti defaultu je potřebné znát tržní hodnotu aktiv dané společnosti. Dostupné jsou však pouze účetní hodnoty aktiv známé z účetních výkazů společnosti. Proto bylo nutné do výše uvedeného postupu zabudovat opční metodologii. Podstata využití opční metodologie vychází z (2.2). U veřejně obchodovaných společností je možné zjistit tržní hodnotu vlastního kapitálu  $E_T$ , a to jako součin počtu akcií společnosti a ceny, za kterou se obchodují. Na základě (2.7) je pak určen vztah mezi tržní hodnotou vlastního kapitálu  $E_t$  a tržní hodnotou aktiv společnosti  $A_t$ :

$$E_t = A_t \cdot \Phi(d_1) - Le^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad (2.7)$$

kde  $r$  představuje logaritmus bezrizikové míry návratnosti. Vztah (2.7) je tzv. standardní

Black-Scholesovou formulí pro kupní opci. Parametry kumulativní distribuční funkce normálního normovaného rozdělení  $d_1$  a  $d_2$  se dopočtou dle (2.8) a (2.9).

$$d_1 = \frac{\ln(A_t / L) + (r + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad (2.8)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}. \quad (2.9)$$

### Iterační metoda

Druhým problémem u Mertonova modelu je určení volatility aktiv  $\sigma$ . K výpočtu volatility aktiv  $\sigma$  lze použít tzv. iterativní postup. Prakticky jde o sestavení systému rovnic vycházející z Black-Scholesovy formule, na které se použije metoda iterace.

Prvním krokem je úprava Black-Scholesovy formule do podoby uvedené v (2.10).

$$A_t = [E_t + L e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)] / \Phi(d_1). \quad (2.10)$$

Pokud se vezme v úvahu předpoklad, že k dispozici jsou údaje za jeden rok, a tento jeden rok má 250 obchodních dní, pak je nutné vytvořit systém rovnic o 251 prvcích:

$$\begin{aligned} A_t &= [E_t + L e^{-r_t(T-t)} \Phi(d_2)] / \Phi(d_1), \\ A_{t-1} &= [E_{t-1} + L_{t-1} e^{-r_{t-1}(T-(t-1))} \Phi(d_2)] / \Phi(d_1), \\ &\dots \\ A_{t-250} &= [E_{t-250} + L_{t-250} e^{-r_{t-250}(T-(t-250))} \Phi(d_2)] / \Phi(d_1). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Každá společnost má různou strukturu dluhů, které mají různou dobu splatnosti. Proto se různorodé dluhy společnosti nahradí zero bondem, který má dobu splatnosti jeden rok. Soustava rovnic (2.11) se na základě této úpravy zjednoduší, neboť vztah  $(T - t)$  je v každé z rovnic nahrazen jedničkou. Soustava poté vypadá následovně:

$$A_t = [E_t + L e^{-r_t} \Phi(d_2)] / \Phi(d_1),$$

$$A_{t-1} = [E_{t-1} + L_{t-1}e^{-r_{t-1}}\Phi(d_2)] / \Phi(d_1),$$

...

$$A_{t-250} = [E_{t-250} + L_{t-250}e^{-r_{t-250}}\Phi(d_2)] / \Phi(d_1). \quad (2.12)$$

Iterační metoda pak probíhá následujícím způsobem: nastaví se počáteční hodnota  $A_{t-n}$ , pro  $a = 0, 1, \dots, 250$ . První volbou je nastavit počáteční hodnotu  $A_{t-n}$  jako sumu tržní hodnoty vlastního kapitálu  $E_{t-n}$  a účetní hodnoty dluhu  $L_{t-n}$ . Druhá neznámá  $\sigma$  se poté doplní hodnotou směrodatné odchylky logaritmu výnosů aktiv, které se vypočítaly pomocí  $A_{t-n}$ . Pro další iterační kroky  $k = 1, \dots, x$ , kdy  $x$  je poslední iterační krok, platí, že jsou hodnota  $A_{t-n}$  a hodnota  $\sigma$  z předchozí iterace vloženy do Black-Scholesovy formule (2.7). Na základě toho jsou vyčísleny nové hodnoty  $d_1$  a  $d_2$ , které je nutné následně vložit do (2.10) a vypočíst, tak novou hodnotu  $A_{t-n}$ , která je opětovně využita k získání neznámé  $\sigma$ . Takto se postup opakuje, dokud neproběhnou všechny iterační kroky a nejsou vypočteny konečné hodnoty proměnných  $A_t$  a  $\sigma$ .

### 2.2.3 Rozšíření a vývoj původního Mertonova modelu

V této části bude čerpáno především z Benito, Glavan a Jacko (2005), Elizalde (2006), Wang (2009), Hull, Nelken a White (2004).

#### Black-Cox

Prvním poměrně rozsáhlým rozšířením původního Mertonova modelu je verze autorů Blacka a Coxe z roku 1976. Tato verze se nazývá i jako tzv. *First Passage Model*, a default společnosti je zde označován jako situace, kdy hodnota aktiv společnosti poprvé poklesne pod určitou hranici, což znamená, že default může nastat kdykoli. Významnou změnou je existence tzv. *bezpečnostních smluv* (*safety covenants*), jejichž vznik v modelu věřitelům umožňuje převzetí dané společnosti, v případě, že její hodnota poklesne pod určitou hranici, bariéru. Prakticky to znamená, že default samotný je fixován k určité nenulové hranici (je dán z vnějšku, exogenně). Vlastní kapitál zde již není chápán jako call opce, ale jako bariérová *down-and-out* call opce na aktiva společnosti, pro kterou je charakteristické, že opce je bezcenná, pokud hodnota aktiv v čase  $[0, T]$  klesne pod určitou hodnotu. Toto je umožněno právě existencí

bezpečnostních smluv. Druhým rozšířením je, že dluh je rozlišován na nadřizený a podřizený a jejich ohodnocení není stejné. Třetí změnou je snaha o vývoj přístupu k ocenění rizikových dluhopisů, u nichž jsou vypláceny kupony (a tedy dluh není brán jako homogenní a nenahrazuje se pro účely výpočtu zero bondem). Prostřednictvím ocenění těchto dluhopisů je stanovena určitá defaultní bariéra, a dále je ještě bráno v potaz, zda existují nebo neexistují omezení při prodeji majetku. Na základě tohoto je pak v modelu demonstrováno, že existence bezpečnostních smluv a omezení týkajících se prodeje majetku mohou posloužit ke zlepšení práv věřitelů a ke zvýšení poměru dluhu ve struktuře pasiv společnosti.

### **Leland, Leland-Toft**

Další významné rozšíření Mertonova modelu je spojeno s následujícími autory: Leland v roce 1994, Leland a Toft v roce 1996. Význam obou rozšíření spočívá v zohlednění daní, agenturních nákladů a nákladů bankrotu (úpadku) v modelu, což mělo umožnit optimalizovat kapitálovou strukturu společnosti. Do modelu byla zavedena konkrétně daň z příjmu právnických osob, agenturní náklady a náklady úpadku, které byly interpretovány jako tzv. *náklady na likvidaci*. Životnost dluhu společnosti v původním Mertonově modelu byla považována za nekonečnou. U rozšířeného modelu Lelanda a Tofta si již společnost může vybrat nejen objem dluhu, ale také jeho životnost, splatnost. Na základě tohoto rozšíření bylo tedy možné modelovat, jak optimální bariéru defaultu (kdy tržní hodnota vlastního kapitálu jde k nule), tak optimální kapitálovou strukturu, která napomáhá zvyšovat hodnotu společnosti. Splátnost, životnost dluhu v Lelandově a Toftově modelu představuje kompromis mezi daňovými výhodami, náklady úpadku a agenturními náklady. Autoři tak umožnili pochopit, proč společnosti k financování své ekonomické činnosti využívají také krátkodobý dluh. Dlouhodobé dluhy sice generují vyšší hodnotu společnosti, ale právě prostřednictvím krátkodobých dluhů je možné redukovat agenturní náklady a morální hazard.

### **Shimko-Tejima-van Deventer**

Jiným rozšířením modelu, které se však již nepočítá přímo pod Mertonův model je tzv. *Shimko-Tejima-van Deventer model* z roku 1993. Tento tzv. STV používá sice rámec Mertonova modelu, ale je označován za samostatný model. Jeho změna oproti Mertonovu modelu spočívá ve změně jedné ze zjednodušujících podmínek, a to konkrétně podmínky týkající se úrokových měr. U STV již nejsou považovány za konstantní. V modelu STV je podstatná skutečnost, že kreditní riziko se zvyšuje s růstem nominální hodnoty dluhu a s růstem



volatility aktiv. Taktéž bylo zjištěno, že změny v korelaci mezi úrokovými sazbami a hodnotou aktiv mohou mít negativní či pozitivní dopad na úroveň kreditního rizika.

### **Kealhofer-McQuown-Vasicek**

Mertonův model byl do praxe převeden společností KMV Group pomocí tzv. *KMV modelu*. KMV však nevyužívá celý model, ale spíše rámec, který byl Mertonem využit pro odhad vzdálenosti defaultu. KMV model je postaven na tzv. *EDF (Expected Default Frequency)*, a ta je odhadována jako podíl společností s danou DD, které ve skutečnosti opravdu zbankrotovaly. Model KMV je kalibrován na reálná tržní data, neboť pravděpodobnost defaultu spočtená na základě původního Mertonova modelu může tzv. podceňovat skutečné riziko a snižovat tak reálnou pravděpodobnost defaultu. U KMV je také rozlišován dluh na dlouhodobý a krátkodobý. Default společnosti je spuštěn poklesem hodnoty aktiv na hodnotu nižší, než je suma celého krátkodobého a části dlouhodobého dluhu společnosti.

#### **2.2.4 Optimalizace dluhu**

V rámci porovnatelnosti výsledků a použitelnosti Mertonova modelu v praxi bude provedena optimalizace dluhu. Optimalizace bude provedena také proto, že kvůli řadě zjednodušujících podmínek by výsledky dosažené pomocí Mertonova modelu nemusely odpovídat realitě. Teoretická východiska problematiky budou podložena především metodikou z publikace Zmeškal (2013).

Hledaná optimální velikost dluhu bude vyčíslena na základě optimalizační úlohy. Optimalizační úloha obecně je prostředkem k nalezení nejlepšího (optimálního) řešení ze všech možných řešení zadaného problému. Optimalizace je tedy určena k nalezení hodnot proměnných, které zaručí, že řešení modelovaného problému bude nabývat požadovaných hodnot nebo se požadovaným hodnotám bude co nejvíce blížit. Optimalizační úloha je nazývána také jako úloha matematického programování. U matematického programování může jít např. o lineární, nelineární, celočíselné, parametrické, dynamické, vícekritériální programování, apod.

V diplomové práci bude využita optimalizační úloha lineárního programování. U lineárního programování je problém zadán, popsán pomocí soustavy lineárních rovnic a nerovnic, přičemž parametry definující požadované řešení jsou rovněž vyjádřeny jako lineární.

Proměnné v tomto typu úloh nabývají reálných hodnot, jež náleží určitým mezím. Optimalizační úloha lineárního programování je tvořena třemi parametry:

- účelovou funkcí,
- omezujícími podmínkami,
- podmínkami nezápornosti.

*Účelová funkce* je matematickým zápisem, který slouží k vyjádření vztahů mezi parametry a proměnnými. Účelová funkce je kritériem rozhodování.

*Omezující podmínky* a *podmínky nezápornosti* vymezují prostor řešení, rozhodování. Prakticky slouží k vyjádření hodnot, jakých mohou proměnné nabývat, nebo je jimi vyjádřen interval, ve kterém se řešení problému může nacházet. Všechny tři parametry mohou být matematicky zapsány buďto pomocí *maticového zápisu* (popis na základě matic a vektorů) nebo pomocí *sumačního zápisu*.

Obecný sumační zápis účelové funkce je následující:

$$\sum_j c_j \cdot x_j \rightarrow \min(\max) \quad (2.13)$$

přičemž  $c_j$  představuje parametr (který musí být zadán) a  $x_j$  je proměnná (výsledek řešení, hledaná hodnota). Účelová funkce může být minimalizována, maximalizována, popř. může nabývat předem zadanou hodnotu.

Omezující podmínky jsou dány obecným vztahem (2.14) a podmínky nezápornosti vztahem (2.15).

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j \leq b_j, \text{ pro } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.14)$$

$$x_j \geq 0, \text{ pro } j = 1, 2, \dots, N \quad (2.15)$$

kde  $a_{ij}$  a  $b_j$  představují parametry, které jsou zadány.

## 2.3 Predikce

Predikce je důležitou součástí finančního řízení a rozhodování. Na základě predikce se činí mnohá rozhodnutí, která ovlivňují společnosti do budoucna. Predikce slouží ke zjištění

možného vývoje veličin v budoucnosti a má být podkladem pro lepší pochopení či snazší zobrazení možného budoucího stavu věcí.

V diplomové práci bude predikce založena na stochastických (náhodných) procesech a na simulační metodě Monte Carlo. Nejprve bude nastíněn postup predikce a charakteristiky simulace Monte Carlo. Poté budou popsány stochastické procesy a uvedeny základní vztahy. V diplomové práci bude pro větší přesnost simulací a následné predikce provedena stratifikace, která bude popsána a rozebrána.

Okruh literatury zabývající se touto problematikou je poměrně široký, volně bude čerpáno z publikací Zmeškal (2013), Tichý (2010), Papapantoleon (2000), Hirs a Madan (2001), Fiorani (2004), Madan, Carr a Chang (1998), Wang (2009).

### 2.3.1 Simulační metoda Monte Carlo

Tichý (2010) charakterizuje simulační techniku Monte Carlo jakožto numerickou metodu s obsáhlým aplikačním prostorem při modelování náhodného vývoje veličin. Metodu Monte Carlo lze využít všude tam, kde situace je tak složitá, nebo je takového rázu, že není možné dosáhnout řešení problému za pomoci analytického řešení. Metoda Monte Carlo je tzv. prostá simulační metoda.

Metoda Monte Carlo byla vytvořena ve 40. letech 20. století a jejími zakladateli byli - S. M. Ulam a J. von Neumann. Metoda, která byla dříve označována jako tzv. *statistical sampling* (statistický výběr), vychází z následující definice:

- náhodnost jevů a opakování jejich výskytu jsou identické k činnostem prováděným v kasinech (ruleta je jednoduchý fyzikální generátor náhodných čísel, podobně jako např. hrací kostka).

Metoda Monte Carlo je založena na určení střední hodnoty veličiny, která je výsledkem náhodného děje. V podstatě se vytvoří model pozorovaného děje a po proběhnutí dostatečného množství simulací se data zpracují klasickými statistickými metodami. Výsledkem provedení velkého množství experimentů je obvykle pravděpodobnost určitého jevu. Ze základů metody Monte Carlo vychází řada pravděpodobnostních postupů jako je např. *SBRA*. Principem simulační metody *SBRA* (*Simulation Based Reliability Assessment*) je generování omezených rozdělení a transformace na požadované rozdělení. Při výpočtech v rámci simulace Monte Carlo bude využito právě simulační metody SBRA v případě Lévyho procesů pro gamma rozdělení.

Použití metody Monte Carlo lze rozklíčovat do tří fází:

- analýza problému a vytvoření modelu,
- generování náhodných čísel a jejich transformace, která zaručí, že budou odpovídat požadovanému rozdělení pravděpodobnosti,
- použití statistických metod při zpracování výsledků.

Ve finanční oblasti lze metodu Monte Carlo využít pro oceňování investic, finančních derivátů, analýzu rizika, zjištění optimální hodnoty portfolia, apod.

### 2.3.2 Stochastické procesy

Stochastický proces  $X$  je definován jako parametrický systém náhodných proměnných v čase  $t$  na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , jak je uvedeno ve (2.16).

$$X = \{X(t), t \in T\}, \quad (2.16)$$

kdy pro každé  $t$  z množiny  $T$  je  $X(t)$  náhodnou veličinou.  $\Omega$  je množina, která obsahuje všechny přípustné stavy,  $\mathcal{A}$  množina jednotlivých náhodných jevů a  $P$  pravděpodobnost. Každá realizace náhodného procesu  $X$  je nazývána *trajektorií*. A samotná náhodná veličina  $Z$  je funkcí:

$$Z : \Omega \rightarrow R. \quad (2.17)$$

Podle charakteru množiny  $T$  je dělení stochastických procesů následující:

- $T$  je konečnou nebo spočetnou množinou, pak je  $X(t)$  stochastický proces v diskrétním čase,
- $T$  je interval, pak  $X(t)$  je stochastický proces ve spojitém čase.

Dále je nutné vymezit tzv. *Markovův proces*, pro který platí, že pro danou hodnotu  $X(s)$  a následující hodnoty  $X(t)$ , kdy  $t > s$ , a tedy  $X(t)$  se odvíjí od  $X(s)$ , a nikoli od starších hodnot  $X(u)$ , kdy  $u < s$ . Zjednodušeně lze výše uvedené vysvětlit tak, že vývoj budoucích hodnot je závislý pouze na současné hodnotě  $X(s)$  a nikoli na hodnotách historických. Historické hodnoty slouží pouze jako ukazatel chování proměnné a mohou sloužit pro výpočet dílčích parametrů.

## Wienerův proces

Wienerův proces  $W(t)$  je reálným stochastickým procesem na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, A, P)$ , pro který platí:

- $W(0)=0$ ,
- s pravděpodobností 1 je funkce  $t \rightarrow W(t)$  spojitá v čase  $t$  (*spojitost trajektorií*),
- přírůstky  $W(t)-W(s)$  jsou z rozdělení  $N(0, t-s)$ , a pro libovolné  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  jsou přírůstky  $W(t_1), W(t_2)-W(t_1), W(t_n)-W(t_{n-1})$  navzájem nezávislé (*nezávislost a normalita přírůstků*).

Wienerův specifický proces je součástí všech dalších stochastických procesů. Dle výše uvedených předpokladů se skládá z nulového trendu a náhodné složky, což znamená, že přírůstek hodnoty se rovná náhodné veličině, a také změny proměnné jsou v čase nezávislé. U Wienerova procesu jsou splněny také předpoklady Markovova procesu. Specifický Wienerův proces je definován následujícím způsobem (např. viz Zmeškal, 2013):

$$\tilde{z}_{0+dt} - z_0 = dz = \tilde{z} \cdot \sqrt{dt}, \quad (2.18)$$

kde  $dt$  je nekonečně malá změna času,  $\tilde{z}$  náhodná proměnná z normovaného normálního rozdělení  $N(0,1)$ . Střední hodnota  $E(dz)=0$  a rozptyl  $\text{var}(dz)=dt$ , což představuje změnu času. Směrodatná odchylka je poté  $\sigma(dz)=\sqrt{dt}$ . Pro vývoj proměnné v čase za  $k$  intervalů o stejné délce  $dt$  lze použít:

$$\tilde{z}_T = z_0 + \sum_{i=1}^k \tilde{z}_i \cdot \sqrt{dt}, \quad (2.19)$$

kdy střední hodnota  $E(\tilde{z}_T)=0$ , rozptyl  $\text{var}(\tilde{z}_T)=k \cdot dt=T$  a směrodatná odchylka  $\sigma(\tilde{z}_T)=\sqrt{T}$ .

## Brownovy procesy

Brownovy procesy (pohyby) jsou dalším z příkladů stochastických procesů. Původně byly objeveny při modelování pohybu částic v kapalině. V diplomové práci budou uvedeny dva. Prvním z nich je *Aritmetický Brownův proces* a druhým je *Geometrický Brownův proces*.

## Aritmetický Brownův proces

Aritmetický Brownův pohyb je složen z nenáhodné deterministické složky určené časem a ze specifického Wienerova procesu:

$$dx = \mu \cdot dt + \sigma(dz), \quad (2.20)$$

kde střední hodnota  $E(dx) = \mu \cdot dt$ ,  $E(x_T) = x_0 + \mu \cdot T$  a rozptyl  $\text{var}(dx) = \sigma^2 \cdot dt$ ,  $\text{var}(x_T) = \sigma^2 \cdot T$ . Veličiny, zejména ceny, se však většinou dle tohoto pohybu nemodelují, neboť může nabývat i záporných hodnot.

## Geometrický Brownův proces (GBM)

Jestliže existuje stochastický proces  $\{X(t), t \geq 0\}$ , pak definuje:

$$X(t) = e^{\tilde{Z}(t)}, \quad (2.21)$$

vztah nazývaný jako *Geometrický Brownův pohyb*. Právě specifické vlastnosti tohoto pohybu umožňují jeho široké využití ve finančním modelování. Jde o model růstový – Geometrický Brownův pohyb má exponenciální trend vývoje. Geometrický Brownův pohyb vychází z následujícího vztahu (viz Zmeškal, 2013):

$$dx = \mu \cdot x \cdot dt + \sigma \cdot x \cdot dz, \quad (2.22)$$

což je následně upraveno do podoby (2.23), kde lze lépe rozeznat jednotlivé parametry a celý proces:

$$\frac{dx}{x} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz. \quad (2.23)$$

Na základě (2.23) lze říci, že právě využití tohoto procesu umožňuje formulaci výnosu ceny aktiva  $x$ , kdy  $\mu$  je průměrný výnos, obvykle za období jednoho roku, a  $\sigma$  roční směrodatná odchylka. Střední hodnota je tudíž  $E(dx) = \mu \cdot dt$  a rozptyl  $\text{var}(dx) = \sigma^2 \cdot dt$ .

Modelování budoucího vývoje finančního aktiva pomocí Geometrického Brownova procesu je popsáno v publikacích autorů jako např. Zmeškal (2013), Tichý (2010). Nejprve je nutné vymezit aktivum  $S$ , které má v okamžiku  $t$  výchozí cenu  $S_t$ . Budoucí cena je označena jako  $S_{t+dt}$ , kdy  $dt$  vyjadřuje velmi malý časový okamžik. Spojitý výnos v relativním vyjádření je zobrazen v (2.24).

$$\frac{dS}{S_t} = \ln \frac{S_{t+dt}}{S_t}. \quad (2.24)$$

Dalším krokem je formulace stochastické diferenciální rovnice, která byla popsána výše v (2.22):

$$dS = \mu \cdot S_t \cdot dt + \sigma \cdot S_t \cdot dz, \quad (2.25)$$

kdy  $\mu$  je nenáhodnou a konstantní hodnotou *driftu* aktiva (průměrný roční výnos),  $\sigma$  nenáhodnou a konstantní hodnotou volatility aktiv a  $dz$  zastupuje náhodnou složku. Po zahrnutí rovnice pro spojitý výnos v relativním vyjádření (2.24), lze (2.25) upravit do následující podoby:

$$\ln \frac{S_{t+dt}}{S_t} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz, \quad (2.26)$$

kdy je nutné vztah (2.26) vyjádřit bez logaritmu a výraz  $dz$  nahradit vztahem (2.18):

$$S_{t+dt} = S_t \cdot \exp(\mu \cdot dt + \sigma \cdot \tilde{z} \cdot \sqrt{dt}). \quad (2.27)$$

Jelikož dle Wienerova procesu má platit, že  $E(dz)=0$ , a tedy  $E[\sigma \cdot \tilde{z} \cdot \sqrt{dt}]=0$ , což je sice platné pro (2.25), ale v případě logaritmických cen (2.27) už nikoli, neboť  $E[\exp(\sigma \cdot \tilde{z} \cdot \sqrt{dt})] \neq 0$ . Výraz (2.27) se musí upravit o  $E[\exp(\sigma \cdot \tilde{z} \cdot \sqrt{dt})]$ , což je zobrazeno v (2.28).

$$S_{t+dt} = S_t \frac{\exp(\mu \cdot dt + \sigma \cdot \tilde{z} \cdot \sqrt{dt})}{E[\exp(\sigma \cdot \tilde{z} \cdot \sqrt{dt})]}, \quad (2.28)$$

pokud se vezmou v úvahu vlastnosti normálního normovaného rozdělení  $N(0,1)$  a forma charakteristické funkce, pak vzniká:

$$E[\exp(\sigma \cdot \tilde{z} \cdot \sqrt{dt})] = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right). \quad (2.29)$$

Po úpravách a dosazení lze získat rovnici pro Geometrický Brownův proces:

$$S_{t+dt} = S_t \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma \cdot \tilde{z} \cdot \sqrt{dt}\right], \quad (2.30)$$

kde výraz  $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$  je často zastoupen jako  $\alpha$ . Druhým možným způsobem vyjádření Geometrického Brownova procesu je použití Itôovy lemmy, která je obdobou Taylorova rozvoje avšak pro stochastické funkce. Při využití Itôovy lemmy pro funkci  $G = \ln x$  a při platnosti (2.22), lze spojitý výnos vyjádřit jako:

$$dG = d \ln S = \alpha \cdot dt + \sigma \cdot \tilde{z} \cdot \sqrt{dt}, \quad (2.31)$$

kde  $\mu = \ln \frac{S_{t+dt}}{S_t}$ . Po úpravách lze z výrazu (2.31) získat následující tvar:

$$S_{t+dt} = S_t \cdot \exp(\alpha \cdot dt + \sigma \cdot \tilde{z} \cdot \sqrt{dt}), \quad (2.32)$$

který je stejný jako v případě prvního přístupu. Výše uvedený vztah je pouze pro jeden budoucí stav. V diplomové práci však bude nutné nasimulovat  $N$  budoucích stavů vývoje. Princip je obsažen v (2.33).

$$S_t^{(n)} = S_t \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma \cdot \tilde{z}^{(n)} \cdot \sqrt{dt}\right], \text{ kde } n = 1, \dots, N. \quad (2.33)$$

## Lévyho procesy

V praxi začínají být v posledních letech používány více tzv. *Lévyho procesy*, neboť odpovídají realitě více než Brownovy procesy. Problematika Lévyho procesů je rozebrána např. v Kolář (2014), Hirsa a Madan (2001), apod. Každá skupina dat má určité vlastnosti, které ji charakterizují. Mezi tyto charakteristiky (tzv. *centrální momenty*) jsou řazeny *průměr*, neboli drift (průměrný výnos za dobu  $t$ ), dále *směrodatná odchylka* či spíše *rozptyl*, *šikmost* a *špičatost*. U Brownova pohybu se předpokládá, že data jsou normálně rozdělena, a tedy  $x \in N(0,1)$ . Při modelování vývoje aktiv pomocí Geometrického Brownova pohybu jsou důležité parametry driftu a rozptylu (potažmo směrodatné odchylky), které lze vypočítat dle (2.34) a (2.35). Těmto parametrům se také říká (po řadě) *první* a *druhý centrální moment*.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \text{ pro } i = 1, \dots, n. \quad (2.34)$$

kde  $n$  je počet proměnných  $x$  (např. výnosy akcií, apod.).



$$\text{var}(x) = \frac{1}{1-n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (2.35)$$

I pro reálná data skutečně platí, že drift a rozptyl nabývají hodnot blízkých nule a jedné, což by tedy nijak neomezovalo použití Geometrického Brownova pohybu pro simulace. Problém však nastává u dalších dvou charakteristik – šikmosti a špičatosti. Šikmost (*skewness*), neboli také *třetí centrální moment*, je ukazatelem souměrnosti rozložení dat okolo střední hodnoty. Výpočet je následující:

$$k_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k u_i^3 n_i, \text{ kde } u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma(x)}, \text{ pro } i = 1, \dots, k. \quad (2.36)$$

kde  $\sigma(x)$  je směrodatná odchylka. Šikmost může nabývat různých hodnot. Pokud  $k_3 = 0$ , tak data jsou souměrná a náleží  $N(0,1)$ . Pokud  $k_3 < 0$ , pak se jedná o pravostrannou asymetrii, a tedy negativní šikmost je spojena s tzv. *těžkým koncem* nalevo. Pokud  $k_3 > 0$ , pak jde o levostrannou asymetrii, a pozitivní šikmost je spojena s těžkým koncem napravo. Tzv. těžké konce souvisejí se skutečností, že funkce pravděpodobnosti normálního rozdělení je v těchto koncích pod funkcí skutečného rozložení dat, a tedy dochází k určitému zkreslení vypovídací schopnosti. Normální rozdělení tak přináší jiné výsledky, než jaké ve skutečnosti jsou.

Špičatost (*kurtosis*), také známá jako *čtvrtý centrální moment*, naopak vypovídá o relativní strmosti (či plochosti) průběhu rozdělení hodnot kolem střední hodnoty. Normovaná špičatost se vypočte jako:

$$k_4 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k u_i^4 n_i \right) - 3. \quad (2.37)$$

Pokud je  $k_4 = 0$ , pak data mají normální špičatost. Pokud  $k_4 < 0$ , pak jsou data plošší, než je tomu u normálního rozdělení a tento stav je nazýván jako tzv. *platykurtie*. Pokud  $k_4 > 0$  pak jsou data strmější, než je tomu u normálního rozdělení a tento stav je nazýván jako tzv. *leptokurtie*.

U reálných dat nejsou hodnoty šikmosti a špičatosti nulové (popř. u nenormované špičatosti rovny 3), ale naopak vykazují odlišné hodnoty, což bylo prokázáno mnoha empirickými studiemi. Proto u simulací budoucího vývoje a na nich založených predikcích nelze dostávat uspokojivé a reálné výsledky při použití Geometrického Brownova procesu.

Právě kvůli tomuto nedostatku se více začínají využívat tzv. *Lévyho procesy*, které při výpočtech berou v potaz i šikmost a špičatost reálných dat, ze kterých vychází.

Lévyho procesy jsou definovány následujícím způsobem. Lévyho proces je procesem, který splňuje některé speciální vlastnosti, jako například nezávislost přírůstků nebo homogenitu. Jde tedy o náhodný proces  $\{X_t : t \geq 0\}$  na množině  $R^d$ , jestliže jsou splněny následující podmínky:

- pro každé  $n \geq 1$  a  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  jsou náhodné veličiny  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  nezávislé (*nezávislost přírůstků*),
- $X_0 = 0$ ,
- rozdělení  $X_{s+t} - X_s$  nezávisí na  $s$  (*homogenita procesů*),
- proces je spojitý v pravděpodobnosti,
- existuje  $\Omega_0 \in F$  tak, že  $P[\Omega_0] = 1$  a pro každé  $\omega \in \Omega_0$ ,  $X_t(\omega)$  je zprava spojitá pro  $t \geq 0$ , a pro  $t > 0$  existuje limita zleva.

Pro Lévyho procesy je důležitý pojem náhodná procházka a lze říci, že představují její spojitou analogii. Mezi Lévyho procesy lze řadit *Variance Gamma model*, *Normal Inverse Gaussian model* či obecné modely *Hyperbolic Model* a *CGMY model*. Lévyho procesy jsou důležité i tím, že jsou schopny zachytit např. výkyvy trhu či skokové změny cen. Základem těchto procesů jsou Wienerův proces, Poissonův proces či Gamma proces.

Dle učebních textů Kolář (2014) nebo práce autorů Hirs a Madan (2001) lze Lévyho proces popsat následujícím způsobem: Proměnná  $X$  je Lévyho proces a existuje jednoznačně určená funkce  $\psi$  tak, že:

$$\phi X_{(t)}(u) = E(e^{tuX(t)}) = e^{t\psi(u)}, \quad (2.38)$$

a kdy výše uvedený výraz (2.38) představuje Lévyho exponent. Pro  $u \in R$  a  $t \geq 0$ , a  $\psi(u)$  představuje kumulativní charakteristickou funkci. Tato funkce je zobrazena níže:

$$\psi(u) = \log \phi(u), \quad (2.39)$$

kdy vztah (2.39) odpovídá platnosti Lévy-Khintchinovy formule:

$$\psi(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(iux) - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) \nu(dx), \quad (2.40)$$

kde  $\gamma \in R, \sigma^2 \geq 0$  a  $\nu \in R \setminus \{0\}$ . Toto rozdělení je definováno třemi parametry  $\{\gamma, \sigma^2, \nu(dx)\}$ .

Parametr  $\gamma$  představuje drift, parametr  $\sigma^2$  rozptyl a parametr  $\nu(dx)$  tzv. Lévyho hustotu.

V diplomové práci budou využity tzv. *podřízené Lévyho procesy*, konkrétně Variance Gamma proces. V níže uvedeném (2.41) bude specifikován podřízený Lévyho proces. Pokud  $X(t)$  představuje Brownův proces, tak v případě podřízeného Lévyho procesu je nutné zaměnit čas  $t$  v Brownově procesu -  $X(t; \mu, \sigma) = \mu t + \sigma Z(t)$  za vybranou odpovídající funkci  $l(t)$ :

$$X(l(t); \theta, \nu) = \theta l(t) + \nu \tilde{z} \sqrt{l(t)}. \quad (2.41)$$

Samotné modelování je pak ovlivněno charakterem modelované veličiny. V případě, že má být modelována např. cena aktiv, je nutné, aby výsledkem byly pouze hodnoty kladné (2.42). Pokud ovšem mají být modelovány např. výnosy aktiv, které mohou nabývat jak kladných, tak záporných hodnot, musí být využito vztahu v podobě (2.43).

$$S(t) = S_0 \exp[\mu t + X(l(t)) - \omega t], \quad (2.42)$$

kdy  $\mu$  představuje průměrný výnos, drift a  $\omega$  je tzv. korekční parametr.

$$x(t) = \mu t + X(l(t)) - \theta t. \quad (2.43)$$

### Variance Gamma Proces (VG)

V případě Variance Gamma (VG) procesu je funkce  $l(t)$  nahrazena gamma funkcí. VG proces je, jak již bylo řečeno výše, definován třemi parametry  $X(t; \sigma, \theta, \nu)$ :

$$X(t; \sigma, \theta, \nu) = VG(\gamma(t; 1, \nu), \theta, \sigma), \quad (2.44)$$

kdy gamma funkce je dána jako  $\gamma \in G\left[\frac{t}{\nu}, \nu\right]$ ,  $\theta$  je střední hodnota, drift procesu,  $\sigma$  volatilita.

Parametr  $\theta$  souvisí se třetím centrálním momentem, tedy se šikmostí, a parametr  $\nu$  se čtvrtým centrálním momentem, tedy se špičatostí. Samotný VG proces lze vyjádřit následujícím způsobem:

$$VG(t) = \theta \cdot \gamma(t) + \sigma Z(\gamma(t)) = \theta \cdot \gamma(t) + \sigma \cdot \tilde{z} \cdot \sqrt{\gamma(t)}. \quad (2.45)$$

Charakteristická rovnice VG procesu (Hirsa a Madan, 2001) může být prezentována následujícím způsobem:

$$\phi VG(x, \gamma(t; 1, \nu); \theta, \sigma) = E\left(e^{\phi VG(x, \gamma(t; 1, \nu); \theta, \sigma)}\right) = \left(\frac{1}{1 - iu\theta\nu + \sigma^2 u^2 \nu / 2}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \quad (2.46)$$

pro funkci hustoty VG procesu pak platí:

$$f_{VG}(x, \gamma(t; 1, \nu); \theta, \sigma) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi\gamma}} \exp\left[-\frac{(x - \theta\gamma)^2}{2\sigma^2\gamma}\right] \cdot \frac{\gamma^{\frac{1}{\nu}-1} \exp\left(\frac{\gamma}{\nu}\right)}{\nu^{\frac{1}{\nu}} \Gamma\left(\frac{t}{\nu}\right)} d\gamma. \quad (2.47)$$

### *Zobecněná metoda momentů*

Jednotlivé parametry VG procesu lze vypočítat buďto za použití funkce hustoty VG procesu (2.46), pomocí *Metody maximální věrohodnosti* či pomocí *Zobecněné metody momentů*. Aplikace a výpočet parametrů pomocí Metody maximální věrohodnosti jsou poměrně složité, a z toho důvodu bude v diplomové práci využita Zobecněná metoda momentů. Samotné momenty je možné odvodit dvěma způsoby, a to zaprvé pomocí funkce hustoty, anebo zadruhé pomocí charakteristických funkcí. Charakteristické funkce základních momentů VG procesu jsou vyjádřeny vztahy (2.48 – 2.51).

$$m^{(1)} = \theta, \quad (2.48)$$

$$m^{(2)} = \sigma^2 + \nu\theta^2, \quad (2.49)$$

$$m^{(3)} = \theta\nu \cdot (3\sigma^2 + 2\nu\theta^2) \cdot (\sigma^2 + \nu\theta^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (2.50)$$

$$m^{(4)} = 3 \cdot \left[ 1 + 2\nu - \frac{\nu\sigma^4}{(\sigma^2 + \nu\theta^2)^2} \right], \quad (2.51)$$

kde  $m^{(1)}$  představuje drift,  $m^{(2)}$  rozptyl,  $m^{(3)}$  šikmost a  $m^{(4)}$  špičatost. Po definování veškerých proměnných a vztahů lze modelovanou veličinu, kterou je vývoj ceny aktiva, vyjádřit ve formě:

$$S_t = S_0 \cdot \exp(\mu \cdot dt + VG(t) - \omega t) = S_0 \cdot \exp\left(\sigma \cdot dt + \theta \cdot \gamma(t) + \sigma \cdot \tilde{z} \cdot \sqrt{\gamma(t)} - \omega t\right), \quad (2.52)$$

kdy korekční parametr  $\omega$  je vyjádřen jako:

$$\omega = -\frac{1}{\nu} \cdot \ln \left( 1 - \theta \cdot \nu - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \nu \right). \quad (2.53)$$

A stejně jako u simulace Monte Carlo při využití Geometrického Brownova procesu, tak i u VG procesu je nutné vyjádřit vztah (2.52) pro  $N$  budoucích modelovaných stavů:

$$S_t^{(n)} = S_0 \cdot \exp \left( \sigma \cdot dt + \theta \cdot \gamma(t)^{(n)} + \sigma \cdot \tilde{z}^{(n)} \cdot \sqrt{\gamma(t)^{(n)}} - \omega t \right). \quad (2.54)$$

### 2.3.3 Techniky snížení chyby odhadu

V této části je volně čerpáno především z publikace Tichý (2010).

#### Techniky snížení chyby odhadu

Při použití přímé simulace Monte Carlo jsou generovány náhodné prvky tak, aby přímo odpovídaly vlastnostem vybraného rozdělení. Problém však spočívá v množství dat a v rovnoměrnosti jejich rozmístění při náhodném generování.

Při statisících až milionech náhodných prvků je chyba odhadu zanedbatelná. Při menším počtu generovaných prvků však dochází ke zkreslení a náhodné prvky mohou mít nižší vypovídací schopnost a narušovat tak předpoklady o daném pravděpodobnostním rozdělení. Existuje hned několik technik pro snížení chyby odhadu, a to např. technika protikladných proměnných, technika stratifikovaného výběru, aj.

#### Technika protikladných proměnných

Technika protikladných proměnných neboli technika AVMC (*Antithetic Variates Monte Carlo*) je jednoduchou metodou, pro kterou je důležitý výchozí předpoklad dokonalé negativní korelace náhodných prvků.

Pokud tedy existuje vektor  $X$  náhodných prvků z normovaného normálního rozdělení  $N[0,1]$ , pak jeho pronásobením koeficientem -1 vzniká vektor  $\bar{X}$ , jehož prvky taktéž odpovídají normovanému normálnímu rozdělení  $N[0,1]$ , přičemž korelace obou vektorů je dokonale negativní. Sjednocením obou vektorů lze získat dvojnásobné množství dat, u kterých je střední hodnota skutečně nulová. Jedinou nevýhodou této techniky je nutnost symetrického rozdělení dat.

## Technika stratifikovaného výběru

Technika Monte Carlo se stratifikací neboli SSMC (*Stratified Sampling Monte Carlo*) je metodou, pomocí níž lze náhodné prvky daného rozdělení určitým způsobem roztrždit do menších skupin (subintervalů). Tyto subintervaly (tzv. *straty*) jsou konstruovány tak, aby pravděpodobnost, že náhodný prvek z určitého rozdělení je prvkem daného subintervalu, byla pro všechny straty shodná. Technika stratifikovaného výběru je dvojí, tzv. *přímá stratifikace* a tzv. *nepřímá stratifikace*. Výhodou této techniky je možnost jejího využití u různých rozdělení pravděpodobnosti.

### Přímá stratifikace

U této metody je přímo stratifikován interval cílového rozdělení. Výchozím předpokladem je existence náhodného prvku z normovaného normálního rozdělení  $N[0,1]$ , který náleží intervalu  $(-\infty; \infty)$ . Tento interval je následně rozdělen na  $m$  strat:

$$\Pr\{\tilde{\varepsilon} \in (\varepsilon_j; \varepsilon_{j+1})\} = p_m, \text{ kde } p_m = \frac{1}{m}, j = 1, \dots, m. \quad (2.55)$$

kde  $p_m$  představuje pravděpodobnost příslušnosti a je pro všechny straty stejná (suma pravděpodobností všech strat bude rovna jedné). Následně je nutné vygenerovat  $n$  náhodných prvků, pro které je charakteristické  $\tilde{u} \approx U[0,1]$ , a pomocí nichž se cílové prvky získají následujícím způsobem:

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_j + \tilde{u}_i(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j), \text{ pro } i = j = 1, \dots, n. \quad (2.56)$$

### Nepřímá stratifikace

U stratifikace nepřímé je nejprve stratifikováno rozdělení  $U[0,1]$ , tedy funkce hustoty pravděpodobnosti (funkce inverzní k distribuční funkci daného rozdělení). Jde tedy o rozvrhnutí intervalu pravděpodobností na stejné díly a následné vygenerování náhodných pravděpodobností:

$$\tilde{p}_j = \frac{j + \tilde{u}_j}{m}, \text{ pro } j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2.57)$$

Výpočet náhodného prvku z daného rozdělení je proveden pomocí inverzní funkce:

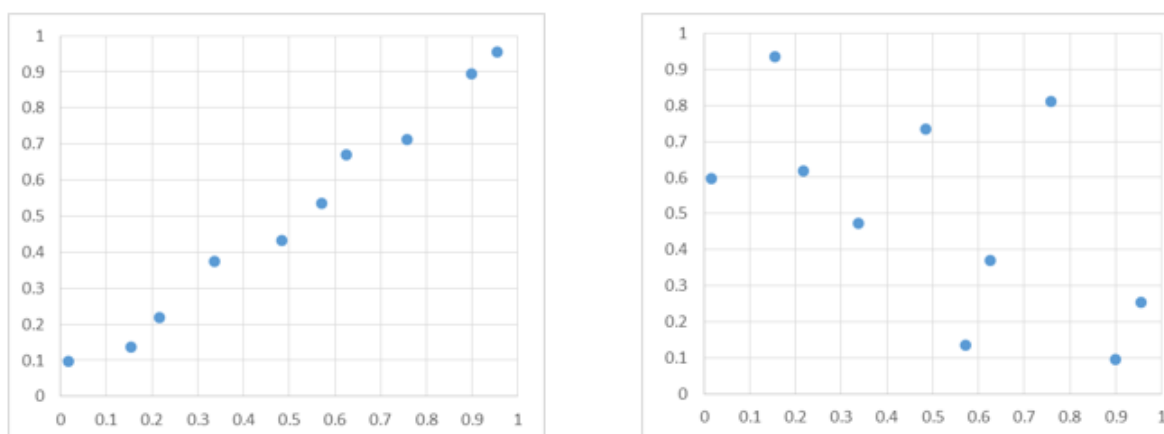
$$\tilde{\varepsilon}_i = F_N^{-1}(\tilde{p}_i). \quad (2.58)$$

Pomocí tohoto způsobu se získají prvky seřazené dle příslušnosti k jednotlivým intervalům, což nemusí být vhodné např. pro komplexní procesy. V těchto případech musí být využity tzv. pokročilé stratifikační techniky. Jednou z nich je LHSMC.

Technika LHSMC neboli *Latin Hypercube Sampled Monte Carlo* je založena na náhodné permutaci stratifikovaných intervalů. Tuto metodu je možné využít pro VG proces, kdy lze jeho prostřednictvím demonstrovat nesymetrické rozdělení prvků, a to pomocí dvou nezávislých procesů.

Nejprve je opět nutné provést stratifikaci funkce hustoty pravděpodobnosti  $U[0,1]$ , kdy u jednoho procesu bude postup stejný jako (2.57) a pro druhý proces se provede náhodná permutace. Pokud by tato úprava nebyla provedena, oba procesy by byly pozitivně korelované (nebyly by tudíž nezávislé) a rozložení dat by neodpovídalo VG procesu. Rozdíl mezi prvky dvou různých procesů, kdy u prvního vzorku je provedena prostá nepřímá stratifikace a u druhého je využita LHSMC, je zobrazen v obr. 2.2.

Obr. 2.2: Srovnání prvků dvou procesů při použití nepřímé stratifikace a při použití LHSMC



První graf představuje situaci, kdy je provedena pouze prostá nepřímá stratifikace, aniž by se pro jednu sadu prvků provedla náhodná permutace. Prvky obou procesů jsou dokonale korelovány. U druhého grafu byla využita metoda LHSMC a lze pozorovat, že prvky jsou náhodně rozmístěny, neexistuje mezi nimi korelace a jsou na sobě nezávislé.

### 3 Popis a analýza vstupních dat

V této části diplomové práce jsou popsána a analyzována data, která budou aplikována ve čtvrté kapitole. Třetí kapitola je rozdělena do dvou částí. První částí je popis dat použitých při výpočtu historické pravděpodobnosti defaultu. Ve druhé části jsou rozebrána data využitá při simulacích a predikci.

#### 3.1 Data využitá pro výpočet historické pravděpodobnosti defaultu

Pro analýzu a ověření možnosti použití Mertonova modelu na reálných datech a výpočet pravděpodobnosti defaultu je vybráno 16 společností ze tří odvětví. Jedná se o odvětví nefinanční, a to energetiku, telekomunikace a chemický, přesněji petrochemický průmysl. Pro každé odvětví je vybráno po jednom zástupci z následujících čtyř zemí: Česká republika, Polsko, Německo a USA. Země jsou zvoleny záměrně, aby se zjistilo, zda může být Mertonův model ovlivněn odlišnými podmínkami v jednotlivých zemích.

Pravděpodobnost defaultu bude pro všech 16 společností počítána za rok 2013. Data za rok 2013 jsou získána z účetních výkazů jednotlivých společností, bezrizikové sazby pro jednotlivé země z webové stránky INVESTING.COM [2014] a z burz cenných papírů v jednotlivých zemích: BURZA CENNÝCH PAPÍRŮ PRAHA [2014], BURZA CENNÝCH PAPÍRŮ VARŠAVA [2014], BURZA CENNÝCH PAPÍRŮ FRANKFURT [2014] a NASDAQ [2014]. Grafy cen akcií jednotlivých společností jsou součástí příloh č. 3 a č. 4.

##### 3.1.1 Česká republika

Denní ceny akcií vybraných společností za rok 2013 jsou získány z Burzy cenných papírů Praha (BCPP), BURZA CENNÝCH PAPÍRŮ PRAHA [2014]. V roce 2013 bylo na BCPP obchodováno 237 dní, což znamená 237 údajů pro každou ze tří vybraných společností. V následující tab. 3.1 jsou zobrazeny vybrané české společnosti, u kterých je uvedeno odvětví a rating přidělený ratingovou agenturou.

Tab. 3.1: Vybrané společnosti – Česká republika

Společnost	Odvětví	Rating
ČEZ	energetika	A-
Telefónica O2	telekomunikace	BBB-
Unipetrol	petrochemie	BBB+



U všech společností byl rating přidělen ratingovou společností S&P. Společnost Unipetrol, jenž je dceřinou společností skupiny PKN Orlen, sdílí rating mateřské společnosti.

### 3.1.2 Polsko

U polských společností jsou denní ceny akcií získány z Varšavské burzy cenných papírů (GPW), BURZA CENNÝCH PAPÍRŮ VARŠAVA [2014]. V roce 2013 se na GPW obchodovalo 247 dní. V tab. 3.2 jsou obsaženy informace o vybraných polských společnostech.

Tab. 3.2: Vybrané společnosti - Polsko

Společnosti	Odvětví	Rating
PGE	energetika	BBB+
Orange	telekomunikace	BBB+
PKN Orlen	petrochemie	BBB+

Společnosti PGE a PKN Orlen byly ohodnoceny ratingovou společností Fitch, která má však u dlouhodobého ratingu stejnou hodnotící stupnici jako společnost S&P. Společnosti Orange byl rating udělen společností Moody's, a to Baa1, což je po převedení do ratingové stupnice společnosti S&P rating BBB+.

### 3.1.3 Německo

Denní ceny akcií jsou v Německu získány z Frankfurtské burzy cenných papírů, BURZA CENNÝCH PAPÍRŮ FRANKFURT [2014]. V roce 2013 bylo na Frankfurtské burze obchodováno 253 dnů. Tab. 3.3 zobrazuje informace o vybraných německých společnostech.

Tab. 3.3: Vybrané společnosti - Německo

Společnosti	Odvětví	Rating
RWE	energetika	BBB+
Deutsche Telekom	telekomunikace	BBB+
BASF	petrochemie	A+

Denní ceny jsou brány přímo z Frankfurtské burzy, nikoli z platformy Xetra, která je u této burzy taktéž k dispozici.

### 3.1.4 USA

Denní ceny akcií jsou u amerických společností získány z NASDAQ [2014]. V roce 2013 bylo na NASDAQ 243 obchodních dní. V tab. 3.4 jsou informace o vybraných amerických společnostech.

Tab. 3.4: Vybrané společnosti - USA

Společnosti	Odvětví	Rating
Exxon Mobile	energetika	AAA
Verizon	telekomunikace	BBB+
Dow Chemical	petrochemie	BBB

Účetní data potřebná pro výpočet jako např. objem krátkodobých a dlouhodobých dluhů či počet akcií společnosti, budou převzata ze správ o hospodaření vydávaných samotnými společnostmi (viz Seznam použitých zdrojů). Správnost údajů je zajištěna čerpáním pouze auditovaných informací.

Pro výpočet pravděpodobnosti defaultu jsou jako bezrizikový výnos brány měsíční výnosy desetiletých státních dluhopisů vyjádřené p. a.

## 3.2 Data využita pro predikci

Predikce bude provedena na třech vybraných společnostech, po jedné z každého odvětví. Predikce bude vycházet z denních dat za období 1. leden 2010 – 27. únor 2015. Z těchto dat budou vypočteny potřebné údaje a samotná predikce pak bude vycházet z posledních známých údajů, tedy z ceny akcií ze dne 27. února 2015, z bezrizikové sazby pro měsíc únor, z podílu dluhu, který bude získán optimalizací pro jednotlivá odvětví a z posledního známého počtu akcií společnosti. V tab. 3.5 jsou informace o společnostech vybraných pro predikci.

Tab. 3.5: Informace o vybraných společnostech

Společnosti	Odvětví	Rating
ČEZ	energetika	A-
BCOM	telekomunikace	A
BAK	petrochemie	BBB-

BCOM (B Communications Ltd.) je izraelskou společností operující v odvětví telekomunikace; společnost Moody's jí byl udělen rating A2, což je po převedení do stupnice

S&P rating A. BAK (Braskem S. A.) je brazilskou společností zabývající se petrochemií. Pro obě společnosti byly denní ceny akcií získány z NASDAQ [2014], kde jsou obě společnosti kótovány. U společnosti ČEZ byla data získána z jejích webových stránek ČEZ [2014].

## **4 Odhad pravděpodobnosti defaultu u vybraných společností**

V této kapitole diplomové práce budou nastíněny provedené výpočty a následně budou zhodnoceny výsledky. Kapitola je rozdělena do dvou podkapitol. V první podkapitole bude u 16 vybraných společností ze čtyř zemí vypočtena historická pravděpodobnost defaultu. Společnosti jsou rozděleny do tří odvětví, přičemž výsledky budou zhodnoceny souhrnně. V druhé podkapitole pak bude provedena simulace možného budoucího vývoje a bude predikována budoucí pravděpodobnost defaultu. Veškeré výpočty vychází z metodiky uvedené ve druhé kapitole a budou prováděny v Microsoft Excel, v softwaru Wolfram Mathematica a softwaru SPSS.

### **4.1 Odhad pravděpodobnosti defaultu za rok 2013**

Přesný postup odhadu pravděpodobnosti defaultu bude popsán na energetické společnosti ČEZ, která je jedním ze zástupců českých podniků. U ostatních společností bude postup odhadu pravděpodobnosti defaultu analogický.

#### **4.1.1 Implementace Mertonova modelu**

V prvé řadě bylo nutné získat denní ceny akcií společnosti ČEZ, která je kótována na BCPP. Tyto denní údaje byly vynásobeny množstvím akcií společnosti, čímž byla získána tržní hodnota vlastního kapitálu. Z výročních zpráv společnosti byla převzata čtvrtletní data o hodnotách krátkodobého a dlouhodobého dluhu. Za bezrizikovou sazbu byl zvolen výnos desetiletého státního dluhopisu. V této oblasti existuje mnoho názorů na to, jakou délku splatnosti u státních dluhopisů zvolit. Jedním z názorů je, že za bezrizikový výnos by měl být použit výnos jednoletého státního dluhopisu, druhým názorem je, že vhodnější je použít výnos dluhopisu s nejdelší splatností. Neboť kapitálové trhy vybraných zemí se dosti odlišují, byl pro bezrizikový výnos zvolen kompromis právě ve formě výnosu desetiletého státního dluhopisu. Výběr dat a periodicita se až na bezrizikový výnos shodují s metodikou popsanou v publikaci Löffler a Posch (2007).

Prvním krokem je vyčíslení hodnoty aktiv, které se provede podle (2.1), tedy sečtením tržní hodnoty vlastního kapitálu a hodnoty dluhu. V úvahu však nebude brán součet všech dluhů, ale jako výchozí parametr bude hodnota dluhu u všech společností nastavena jako suma celkových krátkodobých závazků a jedné poloviny dlouhodobých závazků (převzato z KMV modelu). Provedením tohoto kroku je získáno 237 hodnot aktiv. Pro přehlednější popis dalších

kroků jsou aktiva označena jako  $A$ . Dalším krokem je získání výnosů aktiv. Jelikož je potřebné získat spojitý výnos, je nutné, aby byly spočteny jako logaritmy. Výnosy se tedy spočtou jako  $r_A = \ln\left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)$ . Tímto lze získat 236 hodnot výnosů aktiv. Tyto výnosy jsou nezbytné pro získání dalších parametrů potřebných pro použití Mertonova modelu. Ze všech získaných výnosů aktiv se vypočte směrodatná odchylka, která se vynásobí odmocninou počtu obchodních dnů. Výsledkem je roční volatilita aktiv  $\sigma$  (*Asset Volatility*). Dalším parametrem nezbytným pro použití Mertonova modelu je  $\mu$  (*Asset Drift Rate*) neboli ukazatel, který vypovídá o tom, zda v průběhu jednoho roku výnosy (popř. ceny) aktiv spíše rostly nebo klesaly. Drift na roční bázi lze spočítat pomocí (2.34), jako součin průměrného výnosu aktiv a počtu obchodních dnů.

Nyní musí být v Excelu nadefinována proměnná, na základě které bude probíhat iterační metoda. Proměnná bude představovat také hodnotu aktiv, avšak pro lepší orientaci bude nazvána  $MA$ . Proměnná  $MA$  je definována vztahem (2.10). Jelikož je k dispozici 237 hodnot aktiv a časový horizont je jeden rok, bude vytvořen systém rovnic (2.12). Parametry  $\Phi(d_1)$  a  $\Phi(d_2)$  lze vyčíslit pomocí funkce NORMSDIST, která vrací hodnotu standardního normálního kumulativního rozdělení. Funkce NORMSDIST bude počítána na základě funkce BSd1. V té chvíli je nutné nadefinovat funkci BSd1 ve Visual Basic, který je integrovaným vývojovým prostředím pro programování a vytváření maker v aplikaci Excel. Funkce BSd1 představuje prostředek k výpočtu parametru  $d_1$ . VBA-funkce BSd1 je definována následujícím kódem:

```
FunctionBSd1(S,x,h,r,sigma)
'S = valueunderlying x = strike, h = timeto maturity
'r = risk - freerate, sigma= volatilityunderlying
BSd1=(Log(S/x)+(r+0.5*sigma^2)*h)/(sigma*h^0.5)
End Function
```

Parametr  $d_2$  je spočten dosazením do (2.9). Dalším krokem je použití iterační metody. Pro její úspěšnou implementaci je potřeba vytvořit makro *iterate* a nadefinovat parametr potřebný pro její fungování. Tímto parametrem je suma čtverců odchylek mezi hodnotami  $A$  a  $MA$ . Samotné makro je zadáno následujícím kódem:

```

Sub iterate
Do While Range("I6") > 10^-10
'Copy asset values from iteration k + 1 to iteration k
Range("F4:F240") = (Range("G4:G240"))
Loop
End Sub

```

Makro *iterate* funguje tím způsobem, že hodnoty *MA* nahrazují hodnoty *A*, a to do té doby, dokud suma čtverců odchylek mezi hodnotami *A* a *MA* je nižší než  $10^{-10}$ . Pravděpodobnost defaultu bude stanovena skrze ukazatel *Distance to Default* (DD). DD lze vypočítat podle (2.6). Použitím funkce NORMSDIST, do které se dosadí záporná hodnota vypočtené DD, je pak získána pravděpodobnost defaultu.

Spočtené historické PD jsou poté pomocí ratingové stupnice od společnosti S&P převedeny do podoby ratingu. Tato stupnice funguje na principu intervalů. Pokud např. spočtený rating společnosti vyjde 0,028 %, pak je tato hodnota součástí intervalu (0,02 % – 0,03 %) a společnost má rating AA+. Tabulka pro převod pravděpodobnosti defaultu na ratingové stupně je obsahem přílohy č. 2. V následující tab. 4.1 jsou výsledky dosažené výše popsaným postupem.

Tab. 4.1: Výsledky dosažené aplikací Mertonova modelu na vybrané společnosti

Energetika	Průměrná DD	Průměrná PD (%)	Vypočtený rating	Skutečný rating
ČEZ	4.5798	0.00085	AAA	A-
PGE	4.9860	0.00005	AAA	BBB+
RWE	1.2172	11.95953	CCC	BBB+
Exxon Mobile	17.5239	0.00000	AAA	AAA
Telekomunikace				
Telefónica O2	6.2899	0.00000	AAA	BBB-
Orange	2.4218	1.17246	BB	BBB+
D. Telekom	6.4631	0.00000	AAA	BBB+
Verizon	9.9047	0.00000	AAA	BBB+
Petrochemie				
Unipetrol	13.5541	0.00000	AAA	BBB+
PKN Orlen	3.3905	0.04776	AA-	BBB+
BASF	8.7534	0.00000	AAA	A+
Dow Chemical	7.8872	0.00000	AAA	BBB

V tab. 4.1 jsou společnosti rozděleny do skupin podle odvětví, ve kterých podnikají. V oblasti energetiky byl u všech společností za rok 2013, až na německou RWE, vypočten na základě Mertonova modelu rating AAA, což značí nejvyšší kvalitu v investičním stupni. U RWE to byl rating CCC, který náleží už do stupně spekulativního. Průměrná PD za rok 2013 u společnosti RWE byla cca 11,96 %. Ve srovnání s intervalem posledního investičního stupně BBB-, který je v rozmezí (0,31%–0,52%), je vypočtená PD horší o více než 11 procentních bodů. Skutečný rating společnosti RWE, který jí byl přidělen společností S&P, je stupeň BBB+, který je v rozmezí (0,14%–0,21%), což je o více než 11,5 procentního bodu méně než u vypočteného ratingu.

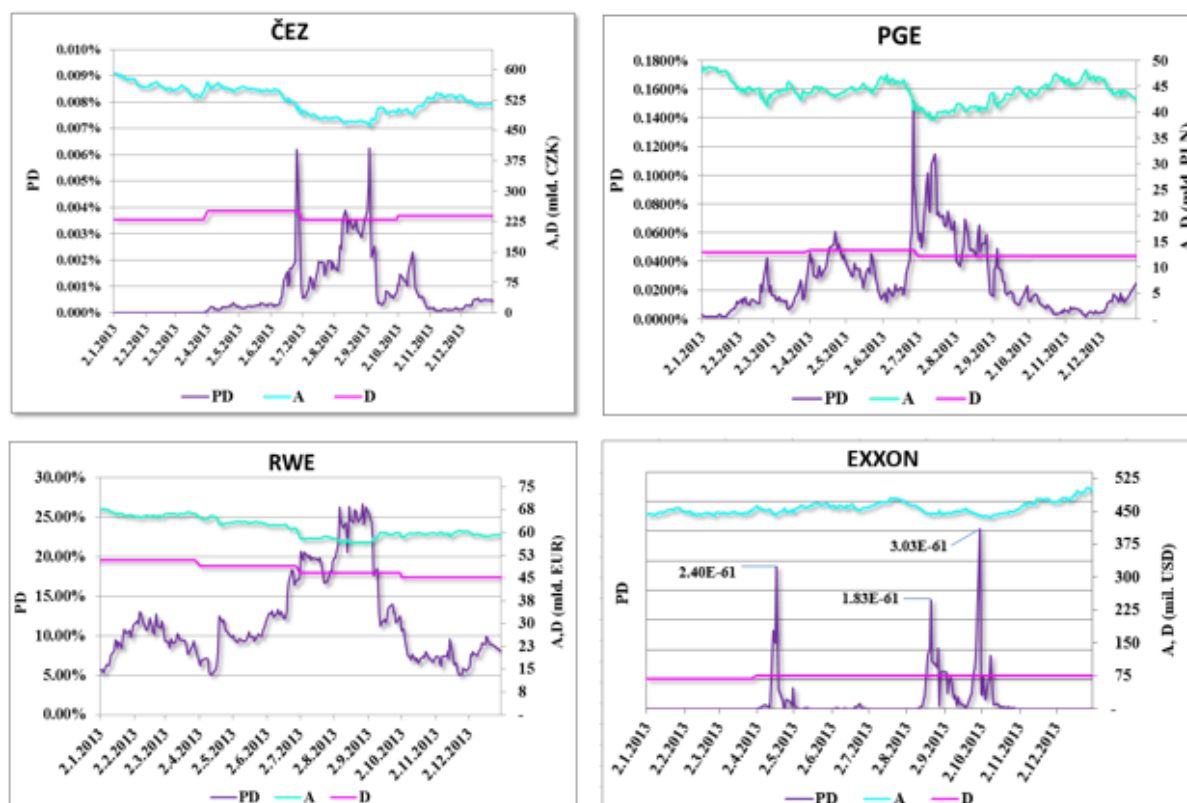
U společností podnikajících v odvětví telekomunikací byla, až na polskou společnost Orange, vypočtena průměrná PD, která odpovídá ratingu AAA. U společnosti Orange je průměrná PD ve výši zhruba 1,17 %, což dle převodní tabulky odpovídá ratingu BB, jenž je dán intervalem (0,86%–1,43%). Úroveň BB spadá do stupně spekulativního. Ratingovou společností byl Orange přidělen rating BBB+, který spadá do intervalu v rozmezí (0,14%–0,21%). Rating společnosti Orange je tedy dle Mertonova modelu cca o 1 procentní bod horší, než na jaký byla ve skutečnosti ohodnocena.

U petrochemického průmyslu nebyla u žádné společnosti vypočtena PD, která by odpovídala spekulativnímu stupni. U společností Unipetrol, BASF a Dow Chemical byly po převedení průměrných PD určeny ratingy AAA. U polské společnosti PKN Orlen (která je zároveň mateřskou společností českého Unipetrolu) byla průměrná PD stanovena ve výši cca 0,047 %, což odpovídá úrovni AA-, pro kterou je vymezen interval (0,04%–0,05%). Ratingovou společností byla PKN Orlen ohodnocena na BBB+, což odpovídá intervalu (0,14%–0,21%). Vypočtená PD společnosti PKN Orlen je tak o více než desetinu procentního bodu lepší, než PD jaká jí skutečně byla přiřazena.

#### **4.1.2 Grafické srovnání**

V následujícím obr. 4.1 jsou srovnány tržní hodnota aktiv a hodnota dluhu energetických společností. Do grafu je přidána i vypočtená PD. Obr. 4.1 je tvořen čtyřmi grafy, kdy u každého grafu figuruje stejné označení. Na hlavní ose (vlevo) jsou hodnoty PD, ke kterým se vztahuje fialová křivka. Na vedlejší ose (vpravo) jsou naneseny hodnoty dluhu a aktiv, kdy modrá křivka představuje tržní hodnotu aktiv a růžová křivka hodnotu dluhu. Hodnota aktiv a dluhů je v mld. jednotek měny dané země a PD je v %, na ose x jsou jednotlivé měsíce roku 2013.

Obr. 4.1: Srovnání PD, tržní hodnoty aktiv a dluhu u společností z odvětví energetiky



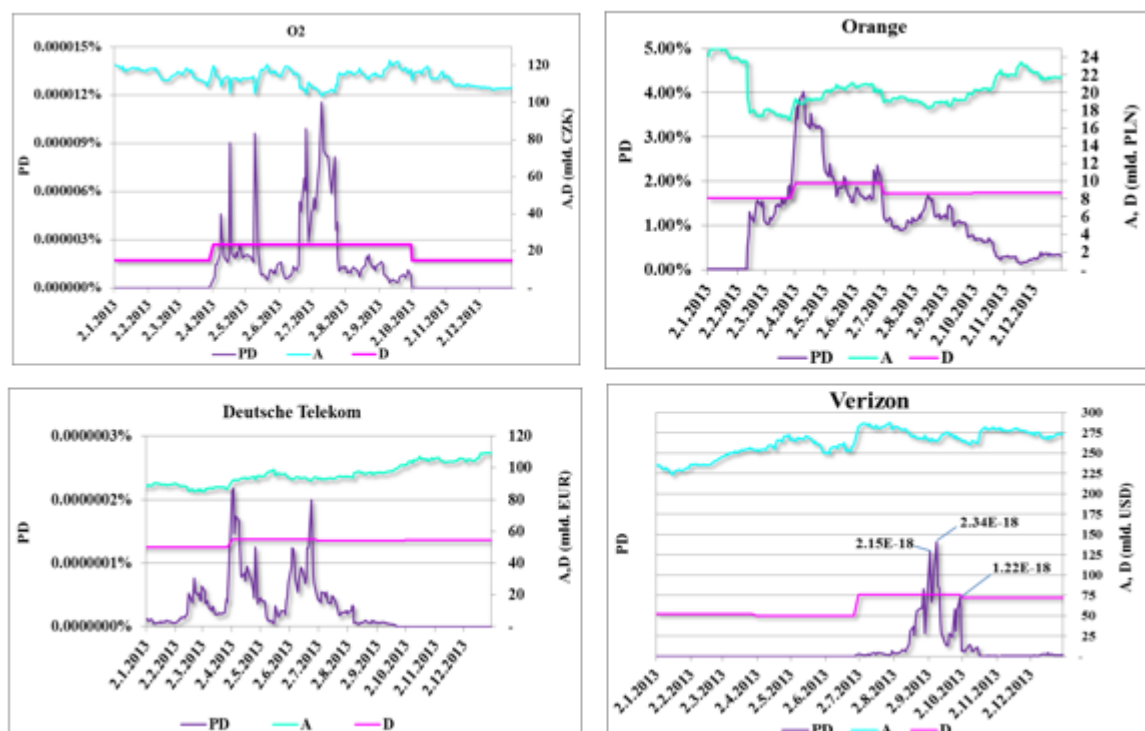
Na první pohled lze rozeznat společnosti, které mají nízkou PD od těch s vysokou PD. Společnosti s nízkou PD mají větší vzdálenost mezi tržní hodnotou aktiv a hodnotou dluhu. Např. společnost Exxon – dluh společnosti je zhruba okolo 75 mld. USD, kdežto tržní hodnota aktiv okolo 520 mld. USD. Naproti tomu společnost RWE má ze čtyř uvedených společností nejvyšší PD, neboť tržní hodnota aktiv je v rozmezí okolo 60-70 mld. EUR a hodnota dluhu zhruba v rozmezí 45-53 mld. EUR, což činí rozdíl zhruba 10-15 mld. EUR. Společnost PGE má velmi rozkolísanou křivku tržní hodnoty aktiv, což je dáno značnou volatilitou ceny akcií společnosti PGE v roce 2013.

U společnosti Exxon je PD velmi malá cca ve velikosti  $1 \cdot 10^{-63}$  procent, vyznačeny jsou nejvyšší hodnoty, a to po řadě  $2,40 \cdot 10^{-61}$ ,  $1,83 \cdot 10^{-61}$  a  $3,03 \cdot 10^{-61}$ . Naopak u společnosti RWE si je možné povšimnout velkého výkyvu v měsících červenec až září, kde PD přesáhla 25 %. Podle převodní tabulky společnosti S&P je každá PD v rozmezí  $(18,25 - 20,00)$  ohodnocena stupněm D, a tedy existuje velmi vysoká pravděpodobnost selhání.

V obr. 4.2 jsou srovnány tržní hodnota aktiv, velikost dluhu a PD u společností z odvětví telekomunikací.



Obr. 4.2: Srovnání PD, tržní hodnoty aktiv a dluhu u společností z odvětví telekomunikace

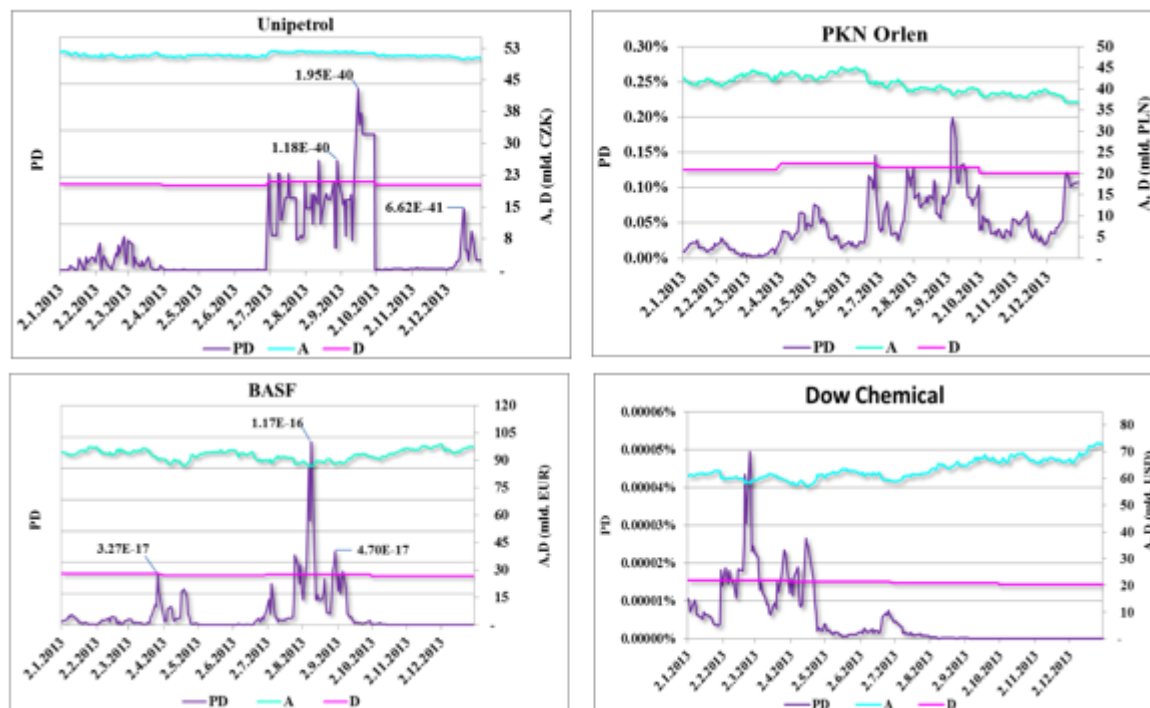


V obr. 4.2 si lze povšimnout, že tři společnosti mají velmi nízkou PD, a to česká společnost Telefónica O2, německá společnost Deutsche Telekom a americká společnost Verizon. Rozdíl mezi tržní hodnotou aktiv a velikostí dluhu u společnosti Telefónica O2 je zhruba 80 mld. CZK, přičemž cena akcií společnosti Telefónica O2 byla v průběhu roku 2013 značně volatilní. PD se pohybuje v řádech miliontin procent. Rozpětí mezi tržní hodnotou aktiv a hodnotou dluhu je u společnosti Deutsche Telekom asi 40 mld. EUR. PD se u této společnosti pohybuje v řádech  $1 \cdot 10^{-10}$  procent. U společnosti Verizon se vzdálenost mezi tržní hodnotou aktiv a hodnotou dluhu pohybuje cca okolo 200 mld. USD. Společnost Verizon je velmi stabilní, neboť dle Mertonova modelu se její PD pohybuje zhruba okolo  $1 \cdot 10^{-9}$ , zvýrazněny jsou hodnoty  $2,15 \cdot 10^{-18}$ ,  $2,34 \cdot 10^{-18}$  a  $1,22 \cdot 10^{-18}$ . Taktéž tržní hodnota aktiv v průběhu roku 2013 víceméně roste, což je dáno růstovou tendencí vývoje ceny akcií společnosti Verizon.

Nejvyšší hodnotu PD lze vidět u polské společnosti Orange. Tento mobilní operátor má průměrnou hodnotu PD okolo 1,17 %. V dubnu 2013 dokonce hodnota PD dosáhla 4%, což spadá do intervalu  $(2,88\% - 4,09\%)$ , který odpovídá stupni B. Stupeň B je spojen s vysoce spekulativní investicí, kdy dlužník čelí nepříznivým podmínkám a očekává se zhoršení situace. Vzdálenost mezi tržní hodnotou aktiv a hodnotou dluhu je u společnosti Orange v čase nestálá a pohybuje se zhruba v rozmezí 12 – 14 mld. PLN. Rozkolísanost pásma je dána značnou volatilitou cen akcií společnosti Orange v roce 2013.

V následujícím obr. 4.3 jsou srovnány tržní hodnota aktiv, hodnota dluhu a PD u chemických společností.

Obr. 4.3: Srovnání PD, tržní hodnoty aktiv a dluhu u společností z odvětví petrochemie



Velmi nízké PD jsou u tří petrochemických společností, a to u české společnosti Unipetrol, německé společnosti BASF a americké společnosti Dow Chemical. Tržní hodnota aktiv společnosti Unipetrol byla v čase stálá a pohybovala se okolo 50 mld. CZK. Hodnota dluhu byla zhruba okolo 20 mld. CZK, a tudíž rozdíl mezi tržní hodnotou aktiv a hodnotou dluhu je cca 30 mld. CZK. PD je u společnosti Unipetrol v řádech  $1 \cdot 10^{-41}$  procent, což vypovídá o stabilní situaci společnosti, zvýrazněny jsou hodnoty  $1,18 \cdot 10^{-40}$ ,  $1,95 \cdot 10^{-40}$  a  $6,62 \cdot 10^{-41}$ . U společnosti BASF je rozdíl mezi tržní hodnotou aktiv a hodnotou dluhu ve stabilním poměru, a to zhruba 70 mld. EUR. PD vypočtená u společnosti BASF za rok 2013 se pohybuje v řádech  $1 \cdot 10^{-18}$  procent, vyznačeny jsou hodnoty  $3,27 \cdot 10^{-17}$ ,  $1,17 \cdot 10^{-16}$  a  $4,70 \cdot 10^{-17}$ . U společnosti Dow Chemical se rozdíl mezi tržní hodnotou aktiv a hodnotou dluhu pohyboval v rozmezí 40 – 50 mld. USD. Průměrná PD je za rok 2013 v řádech  $1 \cdot 10^{-8}$  procent, kdy v rozmezí února až května lze vidět výkyvy, které PD zvýšily na hodnotu v řádech  $1 \cdot 10^{-5}$  procent.

Nejnižší vzdálenost tržní hodnoty aktiv a hodnoty dluhu je u společnosti PKN Orlen, kdy rozmezí je pouze 15 – 20 mld. PLN. Průměrná PD je dle Mertonova modelu pět setin procenta.

Největší výkyv stavu nastal v září 2013, kdy PD byla jen dvě desetiny procenta, což však nemění nic na tom, že společnost je stále v investičním stupni.

### 4.1.3 Optimalizace dluhu

Pro všeobecné využití poznatků získaných aplikací Mertonova modelu na společnosti ze tří odvětví je nutné zužkovat některé parametry, které mohou být obecně akceptovány a lze je ovlivnit. Jelikož počet akcií, jejich cenu a výši výnosu státního dluhopisu ovlivnit nejde, týká se toto zobecnění dluhu společnosti. Jde tedy o určení poměru krátkodobých a dlouhodobých závazků.

Právě s touto problematikou souvisí optimalizace dluhu pro daná odvětví. Vypočtení hodnoty dluhu použitelné pro společnosti z daného odvětví je řešeno jako optimalizační úloha popsaná ve 2.2.4. Řešena bude za pomoci doplňku Řešitel v MS Excel.

Zprv je pro každou společnost vyčíslena pravděpodobnost defaultu. Zároveň je rating, který dostala každá společnost od ratingové agentury, převeden do číselné podoby. Zde se opět využije převodní tabulka od společnosti S&P, která je součástí přílohy č. 2. Jelikož je každý ratingový stupeň dán intervalem, vezme se jeho střední hodnota, např. pro rating BBB+ je výpočet následující – rating BBB+ je dán intervalem  $(0,14\% - 0,21\%)$ , pro který je střední hodnota  $0,175\%$ . Cílem optimalizační úlohy je získat podíl dlouhodobých závazků, který minimalizuje rozdíl mezi vypočteným ratingem a ratingem od ratingové agentury. Jde tedy o to, že se u každého dne spočtou rozdíly mezi pravděpodobnostmi defaultu a ratingem přiděleným dané společnosti ratingovou agenturou a tyto rozdíly se umocní na druhou. Tyto odchylky se sečtou a je tak získán průměrný rozptyl. Pokud je výraz odmocněn, je výsledkem směrodatná odchylka. Tato směrodatná odchylka je účelovou funkcí optimalizační úlohy, kterou lze dle (2.13) zapsat následujícím způsobem:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^N (PD_j - R_j)^2} \rightarrow \min, \text{ pro } j = 1, 2, \dots, N.$$

kde  $PD_j$  představuje jednotlivé vypočtené PD,  $R_j$  ratingové hodnocení. Omezující podmínky dle (2.14) a podmínky nezápornosti dle (2.15) vypadají takto:

$$x_j \leq 1,$$

$$x_j \geq 0, \text{ pro } j = 1, 2, \dots, N.$$

kde  $x_j$  představuje hledaný optimální podíl dlouhodobých závazků na hodnotě dluhu.

Takto získaný rozptyl, resp. směrodatná odchylka, jsou účelovou funkcí, která jde do minima. Tedy je snaha o co nejmenší rozdíl mezi spočtenou pravděpodobností defaultu a přiděleným ratingovým hodnocení. Do řešitele se tedy nastaví účelová funkce, podmínky nezápornosti a také podmínka, že podíl dlouhodobých závazků  $x \leq 1$ . Pro každé odvětví je pak pomocí tohoto postupu spočítán optimální objem dlouhodobých závazků, který by měl být použit v rámci aplikace Mertonova modelu při výpočtu PD pro libovolnou společnost z daného odvětví.

### **Optimalizace dluhu pro jednotlivá odvětví**

U odvětví energetiky jsou pro optimalizaci dluhu využity všechny společnosti – tedy ČEZ, PGE, RWE a Exxon Mobile. Optimální poměr dlouhodobých závazků na celkovém dluhu společnosti vychází pro odvětví energetiky 33 %.

Společnosti z odvětví telekomunikací jsou při optimalizaci dluhu využity jen tři - Telefónica O2, Deutsche Telekom a Verizon. Společnost Orange nebyla do vzorku zahrnuta. Optimalizační úloha v případě zahrnutí společnosti Orange do vzorku neměla racionální řešení, neboť poměr dlouhodobých závazků vycházel jako nulový. Tento stav je dán faktem, že u společnosti Orange je velký rozdíl mezi spočtenou pravděpodobností defaultu a hodnocením ratingové agentury a je obtížné tento rozdíl snížit. Při použití výše zmíněných tří společností je optimální poměr dlouhodobých závazků na celkovém dluhu 93,9 %.

Posledním odvětvím je petrochemický průmysl, kde je vzorek tvořen všemi společnostmi, a to Unipetrol, PKN Orlen, BASF a Dow Chemical. Při optimalizaci dluhu pro dané průmyslové odvětví je hodnota podílu dlouhodobých závazků na celkové hodnotě dluhu ve výši 63 %.

### **Optimalizace dluhu pro vybrané ratingové stupně**

V případě, že by rating společnosti byl známý, ale u výkonnosti a stavu podniku by si investor příliš nebyl jistý, je možné využít Mertonův model pro zjištění těchto informací. Mohlo by se jednat zejména o situace, kdy investor zcela nevěří ratingovým agenturám a jejich hodnocení (spojeno s nedávnou krizí).

U společností, kterým externí ratingové agentury přiřadily rating skupiny A (není zde rozlišeno, zda se jedná o rating AAA či A, neboť u této skupiny jde o bezpečnou investici), je výše podílu dlouhodobých závazků na celkovém dluhu vyčíslena na 66 %. Do vzorku jsou zahrnuty společnosti ČEZ, BASF a Exxon Mobile.

Druhou skupinou jsou společnosti, jimž bylo přiřazeno externí ratingové hodnocení BBB+. Vzorek pro optimalizaci dluhu je tvořen společnostmi PGE, RWE, Orange, Deutsche Telekom, Verizon, Unipetrol a PKN Orlen. Na základě optimalizace je poměr dlouhodobých závazků na celkovém dluhu stanoven ve výši 33 %. Tab. 4.2 shrnuje výše uvedené výsledky.

*Tab. 4.2: Optimální podíl dlouhodobých závazků na celkovém dluhu u vybraných společností*

<b>Dle odvětví</b>	<b>Optimální podíl dlouhodobých závazků</b>
Energetika	0.330
Telekomunikace	0.939
Petrochemie	0.630
<b>Dle ratingu</b>	
Skupina A	0.660
BBB+	0.330

#### **4.1.4 Shrnutí poznatků o použitelnosti Mertonova modelu při výpočtu historické PD**

Dle tab. 4.1 lze říci, že skutečný rating společností, který jim byl udělen na základě hodnocení ratingových společností, se odlišuje od ratingu, který byl určen na základě výsledků Mertonova modelu. Nelze říci, že by Mertonův model byl špatným ukazatelem skutečného stavu společnosti. Při množství zjednodušení, které musejí být použita pro jeho správnou implementaci v praxi, ani nemohou být výsledky totožné s realitou. Taktéž předpoklad použití jen jedné poloviny dlouhodobých závazků výsledky značně zkresluje. Při použití jiných poměrů dlouhodobých závazků model dává rozdílné výsledky a u mnoha společností při použití např. celé části dlouhodobých závazků dochází ke značnému zhoršení výsledků. Model je možné určitým způsobem kalibrovat pomocí optimalizační úlohy popsané v kapitole druhé, v části 2.2.4 zabývající se optimalizací dluhu a provedené v části 4.1.3.

Ratingové hodnocení prováděné ratingovými agenturami však nefunguje na stejném principu jako Mertonův model. Posuzováno je mnoho faktorů ovlivňujících danou společnost. Není tedy nahlíženo pouze na stránku srovnání tržní hodnoty aktiv s velikostí dluhu dané společnosti, ale také na kvalitu dluhů obecně, na jejich rozdílnou splatnost a účely použití.

V zásadě se posuzují dvě stránky – tzv. kvantitativní a kvalitativní. Kvantitativní faktory jsou zaměřeny především na posouzení podmínek, ve kterých se společnost pohybuje (ráz ekonomiky, inflace, zdanění, míra zadlužení, apod.), je zohledňován vývoj ukazatelů vycházejících z účetních údajů (likvidita, aktivita, rentabilita, atd.) – prakticky do této skupiny spadá vše, co je možné nějakým způsobem kvantifikovat. Kvalitativní faktory, které podléhají posouzení, jsou např. management společnosti, jeho výkonnost a kvalita, dále dodavatelsko-odběratelské vztahy, řízení rizik, vize a image společnosti, zaměstnanci, historie společnosti a její úspěšnost na trhu, velikost tržního podílu a konkurenční síla, spojenost zákazníků s výrobky či službami a mnoho jiných faktorů. Rating samotný je velmi komplexní proces a společnost je dlouhodobě sledována a analyzována, než je jí ratingové hodnocení uděleno.

Naopak Mertonův model může sloužit jakožto první zhodnocení, pomůcka pro investora, který chce zjistit skutečnosti o stavu určité společnosti, která však nemusí mít externí rating a nejsou tak k dispozici informace o její pozici. Taktéž věrohodnost ratingových agentur značně poklesla po nedávné finanční krizi, a proto se hledají jiné způsoby objektivního hodnocení skutečné situace společností.

## **4.2 Predikce vývoje pravděpodobnosti defaultu u vybraných společností**

Predikce samotná je provedena k 27. únoru 2015, a má simulovat možný vývoj pravděpodobnosti defaultu k 27. únoru 2016 – tedy stav za rok. Predikce bude provedena na třech společnostech – ČEZ (energetika), BCOM (telekomunikace) a BAK (petrochemie). Počet predikovaných možností bude 10 000 scénářů.

### **4.2.1 Procesy a stratifikace**

Výchozími daty pro zjištění parametrů, které jsou potřebné pro vytvoření procesů, jsou tržní ceny akcií v období 1. leden 2010 – 27. únor 2015. Z těchto dat je nejprve nutné vypočítat denní výnosy (stejně jako při výpočtu PD v části 4.1) dle (2.24). Na základě vypočtených denních výnosů jsou poté vyjádřeny základní charakteristiky dat, a to drift (průměr), směrodatná odchylka, resp. rozptyl, šikmost a špičatost, a to vše na roční bázi. Roční drift se z denních výnosů vypočte na základě (2.34), přičemž výsledek je vynásoben počtem obchodních dnů. Rozptyl je taktéž vyjádřen z denních výnosů, a to na základě (2.35), kdy je výsledná hodnota opět vynásobena počtem obchodních dnů. Při výpočtu charakteristik šikmosti a špičatosti se postupuje zcela shodně a jsou použity vztahy (2.36) a (2.37), přičemž špičatost

není standardizovaná, ale naopak se k výsledné hodnotě přičte číslo 3. Tato úprava je důležitá pro správné vyčíslení parametrů u Lévyho procesů, resp. u Variance Gamma procesu.

U obou procesů, Geometrického Brownova a Variance Gamma, bude využita nepřímá stratifikace a procesy budou namodelovány pomocí funkce hustoty rozdělení (přes inverzní funkci k distribuční funkci vybraného rozdělení).

### **Geometrický Brownův proces**

Prvním krokem je vytvoření 10 000 prvků z rovnoměrného rozdělení. Prvky lze získat použitím analytického nástroje *Generátor pseudonáhodných čísel*, kde lze z nabídky vybrat přímo rovnoměrné rozdělení. V generátoru je nutné nastavit rozsah intervalu, ze kterého mají být prvky generovány – zde  $\langle 0,1 \rangle$ . Daný interval je využit z toho důvodu, že funkce hustoty rozdělení souvisí s pravděpodobností, a ta je dána intervalem  $\langle 0,1 \rangle$ , tedy  $\langle 0 \% - 100 \% \rangle$ .

Nyní je nutné provést *stratifikaci*. Po vytvoření 10 000 prvků z rovnoměrného rozdělení je každému prvku (a to po řadě) přiděleno číslo 1 až 10 000. Od přiřazené hodnoty je poté odečteno číslo jedna a výraz je vydělen číslem 10 000. Taktéž každý vygenerovaný prvek je vydělen číslem 10 000. Sečtením upravené přiřazené hodnoty a upraveného vygenerovaného prvku lze dostat základ pro výpočet náhodného prvku z normovaného normálního rozdělení. Náhodný prvek z normovaného normálního rozdělení je možné vypočíst prostřednictvím (2.57), kdy v MS Excel je k tomuto účelu určena funkce NORMS.INV.

Jelikož pro predikci budou využity parametry výnosů, které byly vypočteny z cen akcií, je nutné ještě zjistit poslední známou hodnotu ceny akcií a počet akcií. Poslední známá hodnota ceny akcií je z 27. února 2015. Následující postup odpovídá vzorci (2.30), kdy nejprve je vyčíslena část vzorce s exponentem a poté je exponent vynásoben poslední známou hodnotou ceny aktiva. Do vzorce jsou dosazeny roční empirické hodnoty driftu, rozptylu a směrodatné odchylky vypočtené ze vstupních dat, přičemž  $dt = 1$ , a je tak získáno 10 000 možných vývojů výnosu. Každý tento výnos je vynásoben poslední známou hodnotou ceny akcií, čímž je umožněn vznik 10 000 scénářů vývoje ceny akcií, které mohou nastat dne 27. února 2016, což odpovídá vztahu (2.33), který popisuje simulaci Monte Carlo. Pokud jsou takto vzniklé hodnoty vynásobeny počtem akcií, jedná se o 10 000 možností vývoje tržní hodnoty vlastního kapitálu.

## Variance Gamma proces

Tento typ Lévyho procesu je specifický tím, že obsahuje náhodné prvky ze dvou rozdělení, a to  $\tilde{z}$  z normálního normovaného rozdělení a  $\gamma(t)$  z gamma rozdělení. Zde je stratifikace provedena jiným způsobem než u Geometrického Brownova procesu, neboť pokud by byl použit stejný způsob jako v předchozím případě, pak by obě rozdělení byla vzájemně korelovaná a byl by tak narušen předpoklad o nezávislosti procesů.

U náhodných prvků z normálního normovaného rozdělení je provedena stratifikace naprosto shodně jako u Geometrického Brownova procesu. Rozdíl však je u gamma rozdělení. Opět je vygenerováno 10 000 prvků pomocí rovnoměrného rozdělení, avšak každému prvku není po řadě přiřazeno číslo od 1 až do 10 000. Naopak je provedena náhodná permutace a každému vygenerovanému prvku připadne různé číslo od 1 do 10 000. Postup je poté už stejný. Od přiřazeného čísla je odečtena 1 a celý výraz je vydělen 10 000. Stejně tak je každý vygenerovaný prvek vydělen 10 000. Sečtením upravených prvků a přiřazeného pořadí vzniká základ pro výpočet prvků z gamma rozdělení. Gamma funkce však pro své správné vyjádření potřebuje specifický parametr  $\nu$ .

Gamma funkce nevychází z empirických parametrů jako je tomu u Geometrického Brownova procesu, ale je nutné potřebné parametry zjistit na základě Zobecněné metody momentů. Aplikace metody momentů je provedena v softwaru Wolfram Mathematica, kam jsou zadány vztahy (2.48 – 2.51), přičemž se při výpočtu využívají výsledky empirických charakteristik vypočtených z výnosů daného aktiva. Pomocí vztahů (2.48 – 2.51) lze získat hodnoty parametrů  $\theta, \sigma, \nu$ .

Právě parametr  $\nu$  je potřebný pro výpočet prvků z gamma rozdělení. Prvek z gamma rozdělení lze získat vyjádřením skrze funkci MS Excel GAMMA.INV, do níž musí být dosazeny tři faktory, a to stratifikovaný prvek rovnoměrného rozdělení, dále výraz  $\frac{1}{\nu}$  a samotný parametr gamma rozdělení  $\nu$ . Poté, co jsou nasimulovány oba typy náhodných prvků, je možné přikročit k výpočtu Variance Gamma procesu dle (2.45). Výnosy, ze kterých budou poté nasimulovány hodnoty tržních cen akcií, jsou vypočteny dle (2.52), kdy je opět využita exponenciální část. Exponenciální část výrazu lze vytvořit tak, že se k empirické střední hodnotě přičte vypočtený Variance Gamma proces a odečte se korekční parametr  $\omega$  vyčíslený na základě vztahu (2.53). Takto získaný výnos se vynásobí poslední známou hodnotou ceny



akcií. K dispozici tak je 10 000 scénářů nasimulovaných pomocí metody Monte Carlo, kdy je možný vývoj ceny akcií k 27. únoru 2016 zachycen prostřednictvím Variance Gamma procesu. Pokud jsou získané hodnoty cen akcií vynásobeny počtem akcií, lze opět získat tržní hodnoty vlastního kapitálu.

#### 4.2.2 Srovnání výsledků dosažených pomocí GBM a VG procesu

V následující tab. 4.3 jsou pro vybrané tři společnosti uvedeny hodnoty parametrů empirických výnosů a hodnoty parametrů výnosů nasimulovaných pomocí GBM a VG procesu. Empirické hodnoty jsou hodnoty vypočtené z výchozích dat, hodnoty modelované jsou hodnoty parametrů vypočtené z nasimulovaných scénářů. Výnosy jsou počítány z cen akcií.

Tab. 4.3: Charakteristiky modelovaných a empirických výnosů akcií

<b>ČEZ</b>	<b>Mean (R)</b>	<b>Stdev (R)</b>	<b>Skew (R)</b>	<b>Kurt (R)</b>
Empirické	-0.0685	0.2228	-0.3233	6.2121
Modelované (GBM)	-0.0685	0.2228	0.0017	2.9963
Modelované (VG)	-0.0679	0.2232	-0.4344	6.7311
<b>BCOM</b>				
Empirické	-0.1034	0.7702	0.5794	7.4943
Modelované (GBM)	-0.1036	0.7701	0.0002	2.9920
Modelované (VG)	-0.1679	0.7663	0.4928	7.1859
<b>BAK</b>				
Empirické	-0.1201	0.4072	-0.0947	4.7917
Modelované (GBM)	-0.1201	0.4072	-0.0021	3.0050
Modelované (VG)	-0.1217	0.4059	-0.1357	4.7949

U všech společností lze vidět, že při použití Geometrického Brownova procesu jsou charakteristiky driftu (Mean) a směrodatné odchylky (Stdev) téměř shodné s charakteristikami empirickými. Problémem jsou však charakteristiky šikmosti (Skew) a špičatosti (Kurt), kdy se empirické a modelované hodnoty odlišují. Predikce, u které je stanoven předpoklad, že se výnosy akcií vyvíjejí na základě Geometrického Brownova procesu, nebude zcela odpovídat skutečnému rozdělení dat.

Naproti tomu výnosy modelované na základě Variance Gamma procesu, u parametrů šikmosti a špičatosti, více odpovídají reálnému vývoji dat, než tomu bylo u Geometrického

Brownova procesu. Predikce na základě údajů vypočtených pomocí výnosů, které sledují Variance Gamma proces, je realističtější a méně zkreslená. Samotné empirické hodnoty výnosů byly podrobeny *Jarque-Bera testu* normality v softwaru SPSS a bylo zjištěno, že ani u jedné společnosti nesledují normální rozdělení. Výsledky *Jarque-Bera testu* jsou obsaženy v příloze č. 5.

Co se jednotlivých společností týče, všechny vykazují vyšší špičatost než je u normálního rozdělení. Tato rozdělení pravděpodobnosti jsou tedy tzv. leptokurtická. Trochu jiné to je u šikmosti. U české energetické společnosti ČEZ a u brazilské petrochemické společnosti BAK je šikmost záporná, a tedy rozdělení jsou tzv. pravostranně asymetrická. U izraelské telekomunikační společnosti BCOM je šikmost kladná a rozdělení je tzv. levostranně asymetrické.

#### 4.2.3 Predikce pravděpodobnosti defaultu

V této části bude provedena predikce pravděpodobnosti defaultu pro tři vybrané společnosti na základě nasimulovaných hodnot vlastního kapitálu, s použitím optimalizace dluhu provedené v podkapitole 4.1, a to k 27. únoru 2016.

Postup predikce je stejný jako v podkapitole 4.1 u 16 vybraných společností. Rozdíl je jen v tom, že nejsou predikovány hodnoty pravděpodobnosti defaultu pro každý obchodní den, ale je predikováno 10 000 možných scénářů, které by mohly nastat právě 27. února 2016.

Je nutné použít charakteristiky dosavadního vývoje tržní hodnoty vlastního kapitálu k tomu, aby mohlo být vystihnuto směřování vývoje dané společnosti. Jedná se o parametry driftu a volatility aktiv. Predikce je provedena na základě výnosů, které byly získány jak za pomoci Geometrického Brownova procesu, tak Variance Gamma procesu. Postup je tedy následující – vezmou se nasimulované tržní hodnoty vlastního kapitálu, dluh je dán opět součtem krátkodobých závazků a příslušného podílu dlouhodobých závazků (viz optimalizace dluhu), poslední známý výnos desetiletého státního dluhopisu a opakuje se stejný postup jako v případě výpočtu pravděpodobnosti defaultu pro jednotlivé společnosti s využitím stejných vzorců a vztahů. Použity jsou také stejné kódy a postupy pro programování funkce BSd1 a makra *iterate*. Jediná odlišnost je ve výpočtu výnosů, kdy jsou veškeré hodnoty aktiv poměřovány k poslední známé hodnotě aktiv, tedy  $r_A = \left( \frac{A_{t-1}}{Ap_n} \right)$ , pro  $n = 1, \dots, 10\,000$ , přičemž

$A_{t-1}$  je poslední známá tržní hodnota aktiv (ze dne 27. února 2015) a  $Ap_n$  jsou všechny hodnoty aktiv vypočtené jako součet nasimulované tržní hodnoty vlastního kapitálu a dluhu společnosti.

#### 4.2.4 Srovnání výsledků při predikci pravděpodobnosti defaultu

V této části budou srovnány výsledné pravděpodobnosti defaultu predikované na základě hodnot nasimulovaných pomocí Geometrického Brownova a Variance Gamma procesu.

##### Srovnání obecných charakteristik

V následující tab. 4.4 jsou zobrazeny charakteristiky výnosů vypočtených z predikovaných tržních hodnot aktiv pro všechny tři společnosti na základě použití Mertonova modelu.

Tab. 4.4: Charakteristiky výnosů aktiv

ČEZ	Mean ( $R_A$ )	Stdev ( $R_A$ )	Skew ( $R_A$ )	Kurt ( $R_A$ )
Modelované (GBM)	-0.0483	0.1398	0.1398	3.0943
Modelované (VG)	-0.0477	0.1375	0.2991	5.9970
<b>BCOM</b>				
Modelované (GBM)	0.0114	0.1240	1.7716	7.9463
Modelované (VG)	-0.0117	0.1524	5.7344	57.3002
<b>BAK</b>				
Modelované (GBM)	0.0284	0.0808	0.7841	3.9702
Modelované (VG)	0.0280	0.0811	1.3044	7.7820

Toto srovnání je provedeno zejména z důvodu diskuze o použitelnosti Mertonova modelu při predikcích. Z vlastností Mertonova modelu by vyplývalo, že při jeho použití, resp. při použití Black-Scholesovy formule budou výsledné predikované tržní hodnoty aktiv sledovat normované normální rozdělení. Jednou ze zjednodušujících podmínek použitelnosti Mertonova modelu totiž je, že logaritmy hodnot aktiv sledují normální rozdělení. Tedy hypotéza, že při predikci tržních hodnot aktiv budou následně jejich výnosy normálně rozdělené, nebyla potvrzena (viz tab. 4.4).

Ani u jedné ze společností nejsou výnosy aktiv normálně rozloženy, přičemž nejbližší k normálnímu rozdělení mají výnosy aktiv společnosti ČEZ, kdy predikce tržní hodnoty aktiv vycházela z předpokladu vývoje cen akcií na základě Geometrického Brownova pohybu.

Nejvíce se od parametrů normálního rozdělení odlišují parametry šikmosti a špičatosti, které patří predikci na základě hodnot nasimulovaných na základě Variance Gamma procesu. Extrémní hodnoty špičatosti jsou u společnosti BCOM, a to 7.9463 při použití geometrického Brownova procesu a dokonce 57,3002 při použití Variance Gamma procesu. U všech společností je kladná šikmost, a tedy data vykazují levostrannou asymetrii. Špičatost je také kladná a vyšší než u normálního normovaného rozdělení, a tedy rozdělení jsou leptokurtická.

### Prezentace výsledků u jednotlivých společností

V následujícím textu budou rozebrány a graficky zobrazeny výsledky predikce PD u každé ze tří vybraných společností, přičemž výsledky budou pro lepší přehlednost vyjádřeny i pomocí VaR (Value at Risk).

#### ČEZ

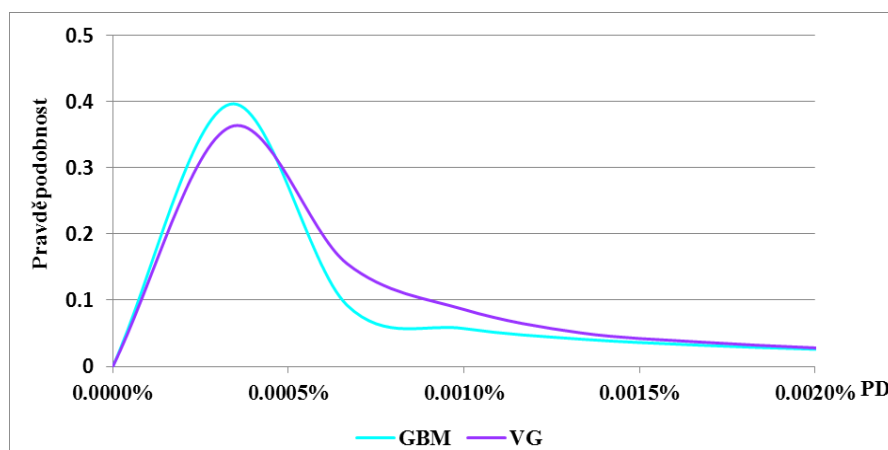
V následující tab. 4.5 jsou uvedeny průměrné hodnoty DD, PD a Stdev pro českou energetickou společnost ČEZ při použití hodnot nasimulovaných na základě GBM a VG.

Tab. 4.5: Predikované průměrné hodnoty DD, PD a Stdev k 27. únoru 2016 u společnosti ČEZ

ČEZ	Průměrná DD	Průměrná PD (%)	Stdev (%)
Modelované (GBM)	4.3673	0.0077	0.0273
Modelované (VG)	4.3698	0.0193	0.2325

Při použití tržní hodnoty vlastního kapitálu modelované na základě Geometrického Brownova procesu je průměrná DD ve výši 4,3673 a průměrná PD ve výši 0,0077 %, což stále odpovídá ratingu AAA (stejně jako při výpočtu PD za rok 2013 v části 4.1). Při použití tržní hodnoty kapitálu modelované na základě Variance Gamma procesu jsou dosažené výsledky o něco horší. Průměrná DD je 4.3698, tedy o zhruba dvě tisíce horší než tomu bylo v případě predikce na základě Geometrického Brownova procesu. Také hodnota PD je vyšší, a to 0,0193 %. V grafu 4.1 jsou srovnána obě rozdělení pravděpodobnosti.

Graf 4.1: Srovnání rozdělení pravděpodobnosti u GBM a VG pro společnost ČEZ



Tab. 4.6 zobrazuje hodnoty VaR pro společnost ČEZ na pěti různých hladinách spolehlivosti, a to od 95 % – 99,999 %.

Tab. 4.6: Hodnoty VaR pro společnost ČEZ na různých hladinách spolehlivosti

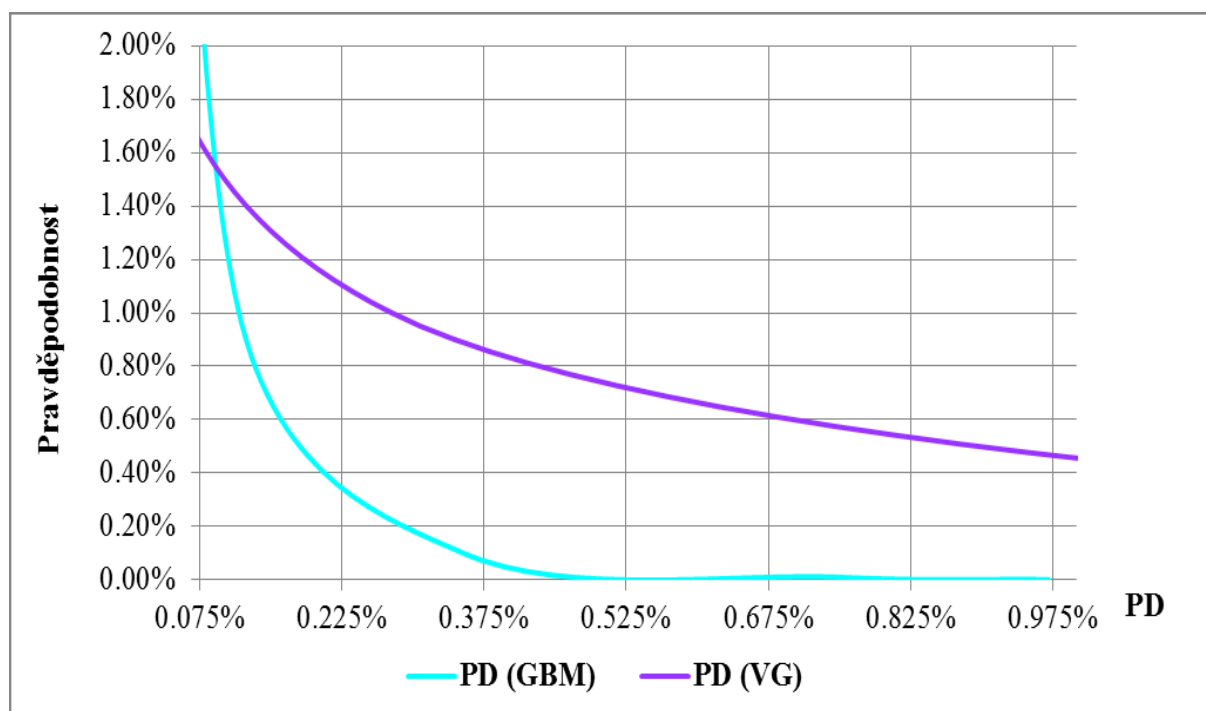
ČEZ	5%	1%	0.1%	0.01%	0.001%
Modelované (GBM)	0.035%	0.116%	0.353%	0.748%	0.971%
Modelované (VG)	0.036%	0.277%	2.816%	11.938%	12.464%

Hodnota VaR prakticky udává nejvyšší možnou ztrátu, která může nastat s určitou pravděpodobností v určitém budoucím období. Zde bude VaR vysvětlena na hodnotách PD. Tedy např. u hodnot PD, které byly predikovány na základě simulace pomocí Geometrického Brownova pohybu, je interpretace následující – PD ve výši 0,035 % lze dne 27. února 2016 očekávat se spolehlivostí 95 %. Taktéž lze říci, že s 5% pravděpodobností může být dne 27. února 2016 PD vyšší než 0,035 %.

U PD, které byly predikovány na základě simulace pomocí Variance Gamma procesu, je interpretace shodná. Kupř. PD 12,464 % může nastat dne 27. února 2016 se spolehlivostí 99,999 %, a tedy s pravděpodobností 0,001 % lze očekávat hodnotu PD vyšší než 12,464 %. Na základě informací tab. 4.6 lze říci, že PD, při jejichž predikci byla využita data modelovaná na základě Variance Gamma procesu, jsou podstatně vyšší, než je tomu u PD predikovaného na základě Geometrického Brownova procesu.

Graf 4.2 zobrazuje srovnání grafů rozdělení pravděpodobnosti u PD predikovaných na základě GBM a VG procesu. Na svislé ose je pravděpodobnost s jakou může PD nabývat určité hodnoty a na vodorovné ose jsou predikované hodnoty PD. Obě osy jsou vyjádřeny v procentech.

Graf 4.2: Srovnání grafů distribučních funkcí pro PD (GBM) a PD (VG), ČEZ



Graf 4.2 zobrazuje úsek, kdy dané PD mohou nastat s pravděpodobností 0,00 %– 2,00 %, je zde tedy možné vyčíst některé hodnoty zobrazené v tab. 4.6. Např. u spolehlivosti 99 %, tedy s 1% pravděpodobností může být PD (GBM) 0,116%, ale dle PD (VG) se může jednat o hodnotu 0,277 %. Graf distribuční funkce PD (GBM) se s grafem distribuční funkce PD (VG) protíná zhruba v okolí PD ve výši 1,5 %.

Graf je důkazem existence tzv. těžkých konců. Predikce PD provedená na základě Geometrického Brownova procesu podceňuje riziko, a tedy udává nižší hodnoty PD, než jaké ve skutečnosti mohou opravdu nastat. Predikce PD na základě Variance Gamma procesu je realističtější, neboť se zvyšuje pravděpodobnost, s jakou může nastat default dané společnosti.

## BCOM

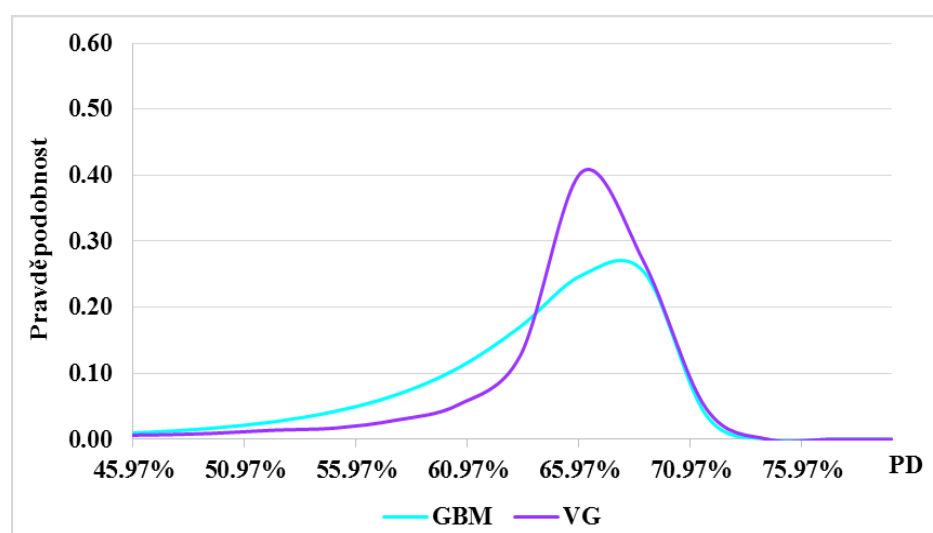
Tab. 4.7 zobrazuje průměrné hodnoty DD, PD a Stdev izraelské společnosti BCOM, která je z oblasti telekomunikací, a to k 27. únoru 2016.

Tab. 4.7: Predikované průměrné hodnoty DD, PD a Stdev k 27. únoru 2016 u spol. BCOM

BCOM	Průměrná DD	Průměrná PD (%)	Stdev (%)
Modelované (GBM)	-0.3129	62.1749	6.1840
Modelované (VG)	-0.3428	63.3899	6.8838

Při použití dat modelovaných na základě Geometrického Brownova procesu je průměrná DD ve výši -0,3129, což koresponduje s PD ve výši 62,1749 %. Tyto hodnoty dokládají, že společnost BCOM dle predikovaných hodnot spadá do spekulativního stupně s ratingem D, což značí velmi vysokou pravděpodobnost selhání. Stejná budoucí kondice společnosti je předpovězena prostřednictvím dat modelovaných na základě Variance Gamma procesu, kdy hodnoty DD a PD jsou dokonce horší (stejně jako tomu bylo u společnosti ČEZ), a to průměrná DD ve výši -0,3428 a průměrná PD 63,3899 %. Graf 4.3 zobrazuje obě rozdělení pravděpodobnosti.

Graf 4.3: Srovnání rozdělení pravděpodobnosti u GBM a VG pro společnost BCOM



V tab. 4.8 jsou uvedeny informace o hodnotách VaR pro společnost BCOM na pěti různých hladinách spolehlivosti.

Tab. 4.8: Hodnoty VaR pro společnost BCOM na různých hladinách spolehlivosti

BCOM	5%	1%	0.1%	0.01%	0.001%
Modelované (GBM)	68.677%	69.501%	70.037%	70.293%	70.363%
Modelované (VG)	68.812%	69.837%	70.481%	70.665%	70.689%

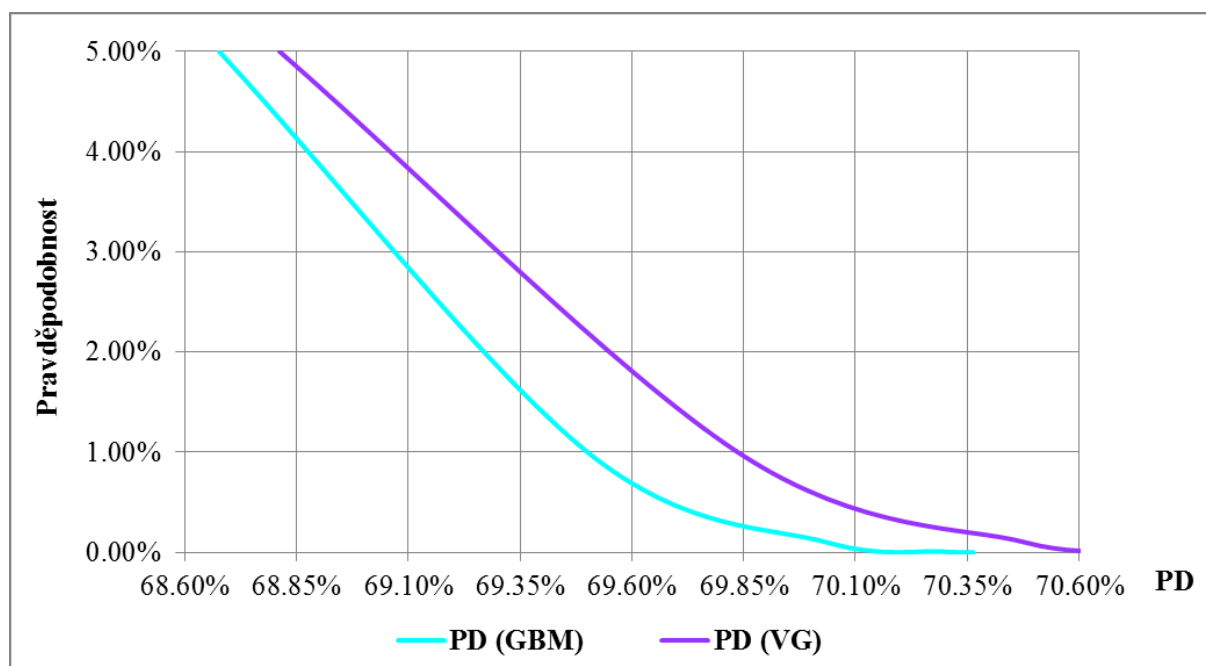
Pro predikci PD modelovanou na základě Geometrického Brownova procesu platí, že hodnota 68,677 % může nastat s 95 % spolehlivostí, a tedy s 5% pravděpodobností může PD nabývat vyšších hodnot než 68,677 %. Existuje jen 0,001% možnost, že PD bude vyšší než 70,363 %.

Stejná interpretace je i u predikované PD modelované na základě Variance Gamma procesu. Výsledky dosažené tímto přístupem jsou opět odlišné – s 95% spolehlivostí může být

hodnota PD 68,812 %, a tedy v 5 % případů bude PD vyšší než 68,812 %. U spolehlivosti 99,999 %, může hodnota PD nabývat 70,689 %, a je tedy pouze 0,001% možnost, že PD bude vyšší než 70,689 %.

Následující graf 4.4 zobrazuje distribuční funkce PD (GBM) a PD (VG).

*Graf 4.4: Srovnání grafů distribučních funkcí pro PD (GBM) a PD (VG), BCOM*



Srovnání je provedeno na části osy, kdy dané PD mohou nastat s pravděpodobností 0,00 % – 5,00 %. V grafu 4.2 lze velmi dobře pozorovat hodnoty z tab. 4.8. Opět jsou patrné tzv. těžké konce u rozdělení, které bylo nasimulováno za pomoci Variance Gamma procesu, které zohledňují riziko. Naproti tomu rozdělení, které bylo nasimulováno pomocí Geometrického Brownova procesu, podceňuje riziko, což lze vysvětlit pomocí následujícího příkladu. Např. pro spolehlivost 99 % (tedy pravděpodobnost 1 %) je hodnota PD (GBM) rovna 69,501 %, kdežto hodnota PD (VG) je 69,837 %. Pokud by investor uvažoval o využití predikce PD na základě údajů modelovaných prostřednictvím Geometrického Brownova procesu, podcenil by tak možné riziko ztráty a mohl by tak učinit rozhodnutí, které je chybné, neboť vyplývá z jiného stavu věcí, než který ve skutečnosti opravdu je.

## BAK

V následující tab. 4.9 jsou informace o průměrných hodnotách DD, PD a Stdev brazilské petrochemické společnosti BAK.

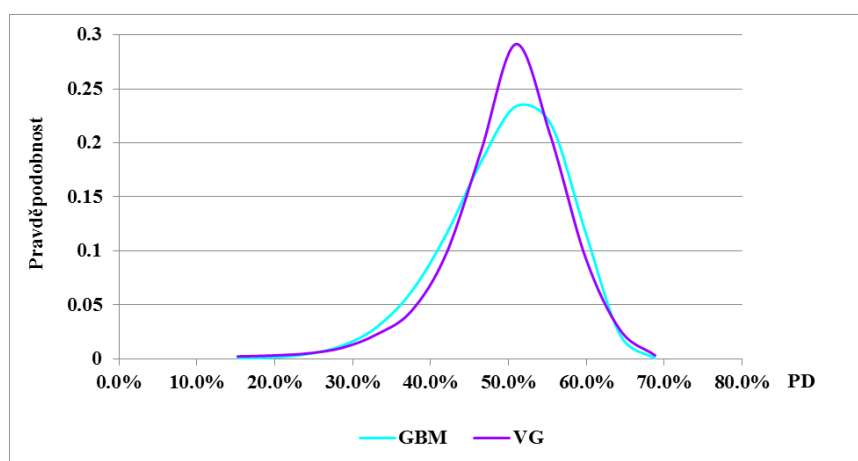


Tab. 4.9: Predikované průměrné hodnoty DD, PD a Stdev k 27. únoru 2016 u společnosti BAK

BAK	Průměrná DD	Průměrná PD (%)	Stdev (%)
Modelované (GBM)	0.0679	47.3819	7.6755
Modelované (VG)	0.0625	47.6115	7.5118

Průměrná predikovaná hodnota DD k 27. únoru 2016 je 0,0679 v případě, že pro predikci PD jsou využita data namodelovaná na základě Geometrického Brownova procesu. Těto průměrné DD odpovídá průměrná PD ve výši 47,3819 %. Při predikci za použití dat modelovaných na základě Variance Gamma procesu je hodnota průměrné DD jen 0,0625, k čemuž je příslušná průměrná hodnota PD 47,6115 %. I u této společnosti se potvrdilo, že Variance Gamma proces zvětšuje procento negativních výsledků. V následujícím grafu 4.5 jsou srovnána obě rozdělení pravděpodobnosti.

Graf 4.5: Srovnání rozdělení pravděpodobnosti u GBM a VG pro společnost BAK



Tab. 4.10 obsahuje hodnoty VaR pro společnost BAK na pěti různých hladinách spolehlivosti, a to 95 % – 99,999 %.

Tab. 4.10: Hodnoty VaR pro společnost BAK na různých hladinách spolehlivosti

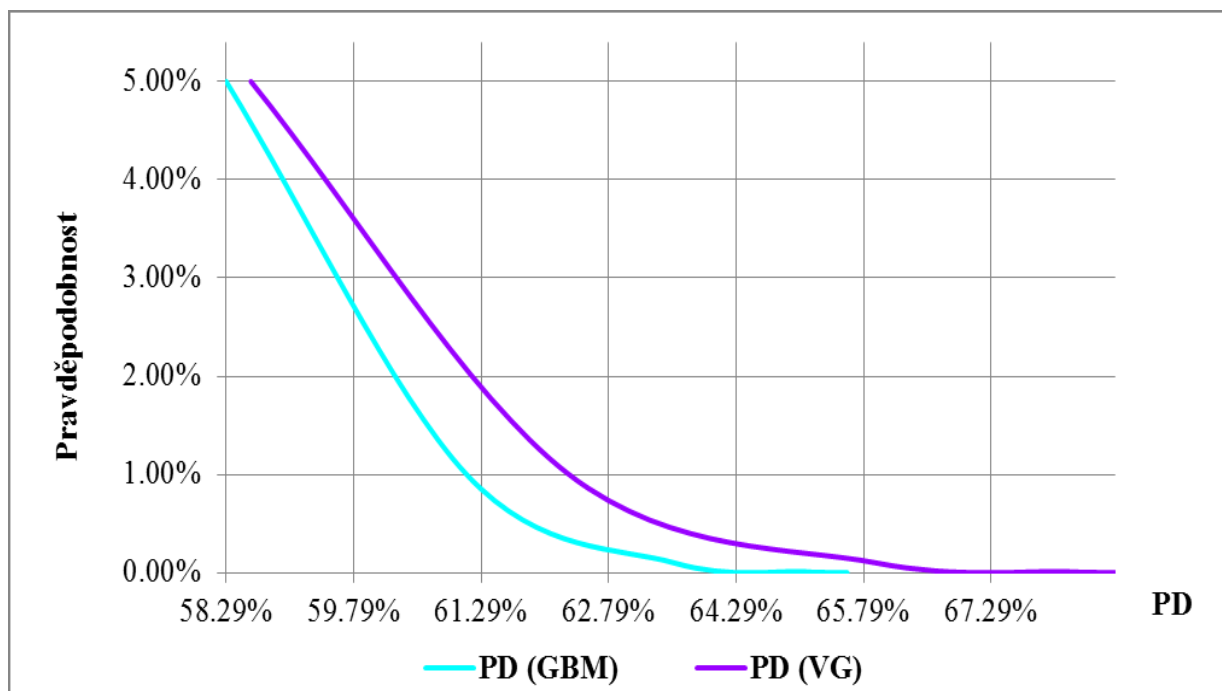
BAK	5%	1%	0.1%	0.01%	0.001%
Modelované (GBM)	58.294%	61.123%	63.569%	65.103%	65.603%
Modelované (VG)	58.585%	62.328%	65.945%	68.194%	68.753%

Dle hodnot obsažených v tab. 4.10 lze potvrdit hypotézu o podceňování rizika při modelování veličin na základě Geometrického Brownova procesu. Hodnoty jsou velmi odlišné. Čím nižší je pravděpodobnost (anebo čím vyšší je hladina spolehlivosti), tím větší je rozdíl mezi VaR pro PD vypočtené na základě obou procesů. Např. Pro hladinu spolehlivosti 99,9 %,

je hodnota PD (GBM) 63,569 %, a tedy jen s 1% pravděpodobností bude hodnota PD vyšší než 63,569 %. Pro stejnou hladinu spolehlivosti je však hodnota PD (VG) dokonce 65,945 %, a tudíž s 1% pravděpodobností bude hodnota vyšší než 65,945 %.

V následujícím grafu 4.6 je zobrazeno srovnání distribučních funkcí PD (GBM) a PD (VG).

*Graf 4.6: Srovnání grafů distribučních funkcí pro PD (GBM) a PD (VG), BAK*



Graf 4.6 je opět projekcí tab. 4.10, kdy lze lépe pozorovat výše zmíněné rozdíly v hodnotách PD na intervalu pravděpodobnosti 0,00 % – 5,00 %. I u tohoto grafu jsou zřejmé tzv. těžké konce u rozdělení pravděpodobnosti nasimulovaného pomocí Variance Gamma procesu.

#### 4.2.5 Shrnutí poznatků o kvalitě jednotlivých procesů a provedené predikci

V této dílčí části 4.2.5 budou shrnuty poznatky o kvalitě jednotlivých procesů použitých pro modelování veličin potřebných pro následnou predikci. Taktéž budou srovnány predikce založené na simulacích podle obou vybraných procesů.

Pro modelování možného vývoje výnosů akcií byly využity dva rozdílné procesy, na základě kterých vznikla dvě různá rozdělení pravděpodobnosti s určitými vlastnostmi. Pro výnosy modelované na základě Geometrického Brownova procesu platilo, že vývoj jejich

rozdělení pravděpodobnosti inklinoval spíše k normálnímu normovanému rozdělení. Po provedené nepřímé stratifikaci byla střední hodnota (drift) rovna nule a směrodatná odchylka se blížila jedné. Taktéž parametry šikmosti a špičatosti většinou odpovídaly normovaným hodnotám nula a tři. Parametry šikmost a špičatost výnosů modelovaných na základě Geometrického Brownova procesu se však odlišovaly od charakteristik reálných dat. Na základě výnosů byly namodelovány budoucí možné stavy cen akcií, z nichž byly následně získány možné stavy vývoje tržních hodnot vlastního kapitálu. Na základě Mertonova modelu bylo z výchozích dat predikováno 10 000 různých scénářů vývoje PD k 27. únoru 2016. Při vykreslení grafu rozdělení pravděpodobnosti predikovaných hodnot PD se rozložení podobalo svým vývojem spíše normálnímu rozdělení.

Pro výnosy, u kterých se budoucí vývoj simuloval na základě Variance Gamma procesu, platilo, že jejich rozdělení se více přibližovalo reálným datům. Charakteristiky (centrální momenty) drift a směrodatná odchylka se lehce odlišovaly od reálných parametrů, avšak u šikmosti a špičatosti byly hodnoty téměř totožné s hodnotami parametrů reálných dat. Možné budoucí ceny akcií a tržní hodnoty vlastního kapitálu vykazovaly lehce horší výsledky, než tomu bylo u modelování, založeném na Geometrickém Brownově procesu. Opět za použití Mertonova modelu bylo predikováno 10 000 rozdílných scénářů PD, která může nastat 27. února 2016. Již na první pohled byly predikované PD vyšší, než tomu bylo u PD predikovaných pomocí vývoje výnosů akcií modelovaného na základě Geometrického Brownova procesu.

Při detailnějším srovnání obou pravděpodobnostních rozdělení bylo zřejmé, že pravděpodobnostní rozdělení, kdy vývoj výnosů byl modelován na základě Variance Gamma procesu, bylo jiné, než je normální rozdělení. Obě rozdělení se v určitých částech překrývala, nejdůležitější však bylo srovnání stavů na koncích obou rozdělení. Pravděpodobnostní rozdělení, kdy vývoj výnosů byl modelován na základě Geometrického Brownova procesu, se značně přibližovalo normálnímu rozdělení. Rozdílné však bylo druhé rozdělení pravděpodobnosti (vycházející z vývoje výnosů na základě Variance Gamma procesu), které se vyznačovalo tzv. těžkými konci. Právě tyto těžké konce jsou rozhodující při modelování kreditního rizika. Normální rozdělení totiž ve svých koncích tzv. podceňuje riziko, kdežto rozdělení založené na modelu vycházejícím z Variance Gamma procesu udává reálnou situaci. Proto v případě použití modelu, který je založen na Variance Gamma procesu, se obecně zvětšuje procento případů, ve kterých dochází k defaultu společnosti, což bylo na základě výše zmíněných tabulek a grafů dokázáno.

Při porovnání obou predikcí lze říci, že věrohodněji situaci popisuje predikce založená na Variance Gamma procesu. Na základě mnoha teorií a výzkumů bylo dokázáno, že data v dlouhodobém časovém horizontu příliš neinklinují k normálnímu rozdělení, což bylo i potvrzeno na základě výpočtu parametrů šikmosti a špičatosti pro vybrané společnosti za období leden 2010 – 27. únor 2015. Data vykazují v dlouhodobém časovém intervalu převážně zápornou šikmost a vyšší špičatost (leptokurtii) než je tomu u normálního rozložení.

Pro běžné účely jako např. získání základních informací o možném budoucím vývoji či při vytváření hrubých plánů, popř. modelování tržního rizika, je možné využít model založený na Geometrickém Brownově procesu. Pro modelování kreditního rizika, které se samo vyznačuje těžkými konci, tento model vhodný není. Dochází, jak již bylo řečeno výše, k podceňování rizika, což může znamenat vznik vyšších ztrát, než se kterými se počítalo. Stejně tak to může znamenat učinění nesprávného investičního rozhodnutí, neboť informace, na kterých by investor založil své rozhodnutí, by byly mylné, nepřesné, určitý způsobem zkreslené. Proto by kreditní riziko mělo být modelováno s využitím předpokladu vývoje výnosů finančních aktiv na základě Variance Gamma procesu, nebo Lévyho procesu obecně. Model predikce založený právě na tomto předpokladu byl ve všech ohledech lepší a lépe vyhovoval reálnému vývoji.

Samotný Mertonův model k predikci vhodný je. Avšak je stále nutné mít na paměti výchozí předpoklady a na jejich základě formulovat příslušné závěry.

## 5 Závěr

Cílem diplomové práce bylo zjistit, zda je Mertonův model vhodný pro měření kreditního rizika prostřednictvím určení historické pravděpodobnosti defaultu pro vybrané společnosti, a zda je jeho prostřednictvím možné provádět predikce budoucího vývoje pravděpodobnosti defaultu. U části ověření možnosti predikce na základě Mertonova modelu bylo také důležité zjistit, jaký proces je nejvhodnější pro simulaci vývoje výnosů aktiv.

Diplomová práce byla rozčleněna do pěti kapitol.

Druhá kapitola byla tzv. teoretická část, kde byl nastíněn řešený problém z hlediska teorie. Byla popsána základní metodika a charakterizovány pojmy související s daným tématem.

Náplní třetí kapitoly diplomové práce byl popis dat využitých při výpočtech, zdroje odkud byla data získána a jejich další vlastnosti a charakteristiky.

Ve čtvrté kapitole byla problematika řešena na základě metodiky popsané ve druhé kapitole. Samotná čtvrtá kapitola byla rozdělena na dvě části. První část byla věnována výpočtu historických pravděpodobností defaultu u vybraných společností prostřednictvím Mertonova modelu. Výsledky byly následně srovnány a okomentovány. Druhou částí byly simulace potřebných dat pomocí Geometrického Brownova a Variance Gamma procesu, na jejichž základě byly provedeny predikce pravděpodobnosti defaultu pro vybrané společnosti, a to opět prostřednictvím Mertonova modelu.

Nepotvrdil se předpoklad, že by Mertonův model mohl být ovlivněn rozdílnými podmínkami v jednotlivých zemích. Rozdíly byly zaznamenány pouze na úrovni jednotlivých společností, které se týkaly jejich finanční pozice a celkového stavu. Mertonův model je tedy možné použít pro společnost z jakékoli země.

Mertonův model je jednou z možností měření a predikování kreditního rizika. Po akceptaci faktu, že je založen na velkém množství zjednodušujících předpokladů, lze říci, že model dává překvapivě dobré výsledky. Jeho výsledky však nelze srovnávat s externím ratingem udělovaným ratingovými společnostmi, neboť rating je komplexnějším systémem hodnocení kreditního rizika ve společnostech a hodnotí i jiné parametry než tržní hodnotu aktiv a velikost dluhu. Při kalibraci modelu pomocí optimalizace dluhu či výběru výnosu vhodného nástroje jako bezrizikové sazby je možné dosáhnout dobrých výsledků. Při použití Mertonova

modelu jako nástroje predikce je důležité uvažovat o rozložení výnosů aktiv a jejich simulaci. V práci byly využity jak výnosy modelované na základě Geometrického Brownova procesu, tak na základě Variance Gamma procesu. Geometrický Brownův proces se blíží normálnímu rozdělení, což se neshoduje s empirickými výzkumy. Lepších výsledků bylo tedy dosahováno při použití Variance Gamma procesu, který zohledňuje i šikmost a špičatost reálných dat. Rozdělení pravděpodobnosti pro kreditní riziko je spojeno s tzv. těžkými konci. Těžké konce vykazovalo rozdělení pravděpodobnosti založené na modelu využívajícím Variance Gamma proces, které bylo od určité úrovně pravděpodobnosti nad křivkou rozdělení pravděpodobnosti, založeném na modelu využívajícím Geometrický Brownův proces. Věrohodnější je tedy predikce, která využívá předpokladu, že výnosy aktiv se vyvíjejí spíše na základě Lévyho procesů, resp. Variance Gamma procesu.

Je nutné říci, že žádná predikce není stoprocentní. Samotné ceny akcií jsou ovlivňovány mnoha faktory a predikce je nemůže postihnout úplně všechny. Predikci lze tedy spíše využít jako podklad pro rozhodování, ke kterému lze přihlédnout. Nelze však založit svá investiční rozhodnutí pouze na ní, ale je nutné sledovat i vývoj dalších externích faktorů.

Diplomová práce pojednává o využití Mertonova modelu při odhadu pravděpodobnosti defaultu a jeho použitelnosti při predikování budoucího vývoje pravděpodobnosti defaultu. Možným navazujícím tématem je zpracování dané problematiky s využitím rozšíření Mertonova modelu, např. při uvažování různých sazeb (ne jen jedné), s jiným náhledem na dluh společnosti, apod. Zajímavá je také problematika reduced-form modelů, která je již však matematicky náročnější než je tomu u Mertonova modelu.

## Seznam použité literatury

### *Publikace*

- [1] ANSON, J. P. Mark. *Credit derivatives: Instruments, Applications, and Pricing*. 1. ed. New Jersey: Wiley&Sons, 2004. 341 p. ISBN 978-0-471-46600-0.
- [2] BLUHM, CH., L. OVERBECK and CH. WAGNER. *Introduction to Credit Risk Modeling*. 2. ed. London: Chapman & Hall Book, 2010. 384 p. ISBN 978-1-58488-992-2.
- [3] DLUHOŠOVÁ, Dana a kol. *Finanční řízení a rozhodování podniku – Analýza, investování, oceňování, riziko, flexibilita*. 3. vyd. Praha: Ekopress, 2011. 228 s. ISBN 978-80-8692968-2.
- [4] JARROW, Robert. Default Parameter Estimation using Market Prices. *Financial Analyst Journal*. 2001, Vol. 57, no. 5, pp. 75-92. ISSN 0015-198X.
- [5] JARROW, Robert and Stuart TURNBULL. Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk. *Journal of Finance*. 1995, Vol. 50, no. 1, Pp. 53-58. ISSN 1540-6261.
- [6] JONES, Stewart and David A, HENSHER. *Advances in Credit Risk Modelling and Corporate Bankruptcy Prediction (Quantitative Methods for Applied Economics and Business Research)*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 312 p. ISBN 978-0-521-68954-0.
- [7] LANDO, David. *Credit Risk Modeling: Theory and Applications*. 1. ed. Princeton: Princeton University Press, 2004. 310 p. ISBN 0-691-08929-9.
- [8] LÖFFLER, Gunter and Peter N. POSCH. *Credit risk modeling using Excel and VBA*. 1. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2007. 261 p. ISBN 978-0-470-03157-5.
- [9] THE HONG KONG INSTITUTE OF BANKERS. *Credit Risk Management*. 1. ed. Singapore: John Wiley & Sons, 2012. 447 p. ISBN 978-0-470-82749-9.
- [10] TICHÝ, Tomáš. *Simulace Monte Carlo ve financích: Aplikace při ocenění jednoduchých opcí*. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2010. 195 s. ISBN 978-80-248-2352-2.

- [11] VAN DEVENTER, Ronald and Kenji IMAI. *Credit Risk Models & the Basel Accords*. 1. ed. Singapore: John Wiley & Sons, 2003. 270 p. ISBN 0-470-82091-8.
- [12] ZMEŠKAL, Z., D. DLUHOŠOVÁ a T. TICHÝ. *Finanční modely – Koncepty, metody, aplikace*. 3. vyd. Praha: Ekopress, 2013. 268 s. ISBN 978-80-86929-91-0.

### ***Elektronické dokumenty***

- [1] ALTMAN, I. Edward and Anthony SAUNDERS. Credit risk measurement: Developments over the last 20 year. *Journal of Banking & Finance* 21. New York: New York University, 1998. 22 p. [cit. 2015-03-15]. ISSN 0378-4266. Dostupné z: <http://socsci2.ucsd.edu/~aronatas/project/academic/science.pdf>.
- [2] BENITO, E., S. GLAVAN and P. JACKO. A Comparison of Credit Risk Models. *Risk Theory, Working Paper*. Madrid: Carlos III University in Madrid, 2005. 25 p. [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.330.5818&rep=rep1&type=pdf>.
- [3] ELIZALDE, Abel. Credit Risk Models II: Structural Models. *CEMFI Working Paper No. 0606*. Madrid: CEMFI, 2006. 32 p. [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: <ftp://ftp.cemfi.es/wp/06/0606.pdf>.
- [4] FEATHERSTONE, A., L. ROESSLER and P. BARRY. Determining the Probability of Default and Risk. *Review of Agricultural Economics*. 2006, Vol. 28, No. 1, pp. 4-23(20). [cit. 2014-08-15]. ISSN: 1467-9353. Dostupné z: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/raec.2006.28.issue-4/issuetoc>.
- [5] FIORANI, Filo. Option Pricing Under the Variance Gamma Process. *Working Paper*. New York: Merrill Lynch & Co., 2004. [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract-id=1411741>.
- [6] FRÜHWIRT, Manfred and Leopold SÖGNER. The Jarrow/Turnbull Default Risk Model: Evidence from the German Market. *European Journal of Finance, Vol. 12, No. 2*. Vienna: Vienna University of Economics, 2006. 26. p. [cit. 2015-03-15]. ISSN 1466-4364. Dostupné z: [http://www.defaultrisk.com/pp\\_price\\_33.htm](http://www.defaultrisk.com/pp_price_33.htm).



- [7] HIRSA, Ali and Dilip. B. MADAN. Pricing American Options Under Variance Gamma. *Lecture Notes*. New York: Columbia University, 2001. 14 p. [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: <http://www.math.columbia.edu/~smirnov/Alihirsa.pdf>
- [7] HULL, J., I. NELKEN and A. WHITE. Merton's Model, Credit Risk, and Volatility Skews. *Working Paper*. Toronto: University of Toronto and Super Computing Consulting Group, 2004. 38 p. [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: <http://www-2.rotman.utoronto.ca/~hull/downloadablepublications/mertonsmodelandvolatilityskews.pdf>.
- [9] KOLÁŘ, Martin. Stochastická analýza. *Učební text vytvořený v rámci Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost v rámci projektu Univerzitní výuky matematika v měnícím se světě*. Brno: Masarykova Univerzita, 2014. 104 s. [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: <http://www.math.muni.cz/~vondra/uvvm/vystupy/KA2/MF002/MF002.pdf>.
- [10] MADAN, D. B., CARR P. P. and E. C. CHANG. The Variance Gamma Process and Option Pricing. *European Finance Review*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1998. No. 2. 28 p. [cit. 2015-03-15]. ISSN: 1382-6662. Dostupné z: <http://www.math.nyu.edu/research/carrp/papers/pdf/VGEFRpub.pdf>.
- [11] PAPAPANTOLEON, Antone. An Introduction to Levy Processes with Applications in Finance. *Lecture Notes*. Vienna: TU Vienna, 2008. 50 p. [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: <http://page.math.tu-berlin.de/~papapan/papers/introduction.pdf>
- [12] SUNDARESAN, Suresh. A Review of Merton's Model of the Firm's Capital Structure with its Wide Applications. *The Annual Review of Financial Economics*. New York: Columbia University, 2013. 21 p. [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: [https://www0.gsb.columbia.edu/faculty/ssundaresan/papers/Merton\\_review\\_cap\\_structure.pdf](https://www0.gsb.columbia.edu/faculty/ssundaresan/papers/Merton_review_cap_structure.pdf)
- [13] TUDELA, Merxe and Garry YOUNG. A Merton-model approach to assessing the default risk of UK public companies. *Working Paper no. 194*. London: Bank of England, 2003. 38 p. [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: <http://www.bde.es/investigador/papers/sie0502.p>
- [14] WANG, Yu. Structural Credit Risk Modeling: Merton and Beyond. *Article from Risk Management*. 2009, issue 16. 33 p. [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: <https://www.soa.org/library/newsletters/risk-management-newsletter/2009/june/jrm-2009-iss16-wang.aspx>.

- [15] BURZA CENNÝCH PAPÍRŮ PRAHA. *Denní ceny akcií společností ČEZ, Unipetrol a Telefónica O2 za rok 2013*. [on-line]. [cit. 2014-07-07]. Dostupné z: <https://www.pse.cz>
- [16] BURZA CENNÝCH PAPÍRŮ VARŠAVA. *Denní ceny akcií společností Orange, PGE a PKN Orlen za rok 2013*. [on-line]. [cit. 2014-07-07]. Dostupné z: <http://www.gpw.pl/>.
- [17] BURZA CENNÝCH PAPÍRŮ FRANKFURT. *Denní ceny akcií společností RWE, BASF a Deutsche Telekom za rok 2013 a finanční výkazy společností za rok 2013*. [on-line]. [cit. 2014-07-07]. Dostupné z: <http://www.boerse-frankfurt.de/en/start#&reiter=newwordertypes>.
- [18] NASDAQ. *Denní ceny akcií společností Dow Chemical, Exxon Mobile a Verizon za rok 2013 a denní ceny akcií společností BCOM a BAK za období leden 2010 – 27. únor. 2015*. [on-line]. [cit. 2014-07-07]. Dostupné z: <http://www.nasdaq.com/>.
- [19] ČEZ. *Finanční výkazy společnosti a denní ceny akcií za období leden 2010 – 27. únor 2015*. [on-line]. [cit. 2014-07-07]. Dostupné z: <http://www.cez.cz/cs/pro-investory.html>.
- [20] UNIPETROL. *Finanční výkazy společnosti za rok 2013*. [on-line]. [cit. 2014-07-07]. Dostupné z: <http://www.unipetrol.cz/cs/VztahySInvestory/vyrocní-zpravy/Stranky/2014.aspx>.
- [21] TELEFÓNICA O2. *Finanční výkazy společnosti za rok 2013*. [on-line]. [cit. 2014-07-07]. Dostupné z: <https://www.o2.cz/spolecnost/vyrocní-a-pololetní-zpravy/>.
- [22] PGE. *Finanční výkazy společnosti za rok 2013*. [on-line]. [cit. 2014-07-07]. Dostupné z: <http://www.gkpge.pl/relacje-inwestorskie>.
- [23] PKN ORLEN. *Finanční výkazy společnosti za rok 2013*. [on-line]. [cit. 2014-07-07]. Dostupné z: <http://www.orlen.pl/EN/InvestorRelations/AnnualReport/Pages/default.aspx>
- [24] ORANGE. *Finanční výkazy společnosti za rok 2013*. [on-line]. [cit. 2014-07-07]. Dostupné z: <http://www.orange-ir.pl/results-centre/annual-reports>.
- [25] EDGAR, U. S. SECURITIES AND EXCHANGE COMMISSION. *Finanční výkazy společností Dow Chemical, Exxon Mobile a Verizon za rok 2013 a společností BCOM a BAK*. [on-line]. [cit. 2014-07-07]. Dostupné z: <https://www.sec.gov/edgar/searchedgar/companysearch.html>.

- [26] INVESTING.COM. *Výnosy státních dluhopisů ČR, Polska, Německa a USA*. [on-line]. [cit. 2014-07-10]. Dostupné z: <http://www.investing.com/rates-bonds/>.
- [27] S&P. *Ratingová stupnice*. [on-line]. [cit. 2014-07-10]. Dostupné z: [https://www.standardandpoors.com/en\\_EU/web/guest/home](https://www.standardandpoors.com/en_EU/web/guest/home).
- [28] FITCH. *Ratingová stupnice*. [on-line]. [cit. 2014-07-10]. Dostupné z: <https://www.fitchratings.com/>.
- [29] MOODY'S. *Ratingová stupnice*. [on-line]. [cit. 2014-07-10]. Dostupné z: <https://www.moody.com/>.

## Seznam zkratek

&	a
AVMC	Antithetic Variates Monte Carlo
BAK	Braskem S. A.
BASF	Badische Anilin- und Soda-Fabrik
BCOM	B Communications
BCPP	Burza cenných papírů Praha
CZK	české koruna, české koruny, českých korun
ČEZ	České energetické závody a. s.
DD	Distance to Default
EAD	Exposure at Default
EDF	Expected Default Frequency
EUR	euro, eura, eur
GBM	Geometrický Brownův pohyb
GPW	Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie
KMV	Kealhofer-McQuown-Vasicek
LGD	Loss Given Default
LHSMC	Latin Hypercube Sampled Monte Carlo
M	maturita, zralost
MM	Miller-Modigliani
NASDAQ	National Association of Securities Dealers Automated Quotations

PD	Probability of Default
PGE	Polska Grupa Energetyczna S. A.
PKN Orlen	Polski Koncern Naftowy Orlen S. A.
PLN	polský zlotý, polské zloté, polských zlotých
RWE	Rheinisch-Westfälische Elektrizitätswerke
S&P	Standard & Poor's
SBRA	Simulation Based Reliability Assessment
SSMC	Stratified Sampling Monte Carlo
STDEV	Standard deviation
USA	Spojené státy Americké
USD	americký dolar, americké dolary, amerických dolarů
VaR	Value at Risk
VBA	Visual Basic
VG	Variance Gamma proces

## Prohlášení o využití výsledků diplomové práce

Prohlašuji, že

- jsem byla seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo;
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečné, ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3);
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě archivována v Ústřední knihovně VŠB-TUO a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že bibliografické údaje o diplomové práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO;
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- bylo sjednáno, že užít své dílo, diplomovou práci, nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě dne 24. 4. 2015

  
.....

## **Seznam příloh**

- Příloha č. 1:      Souhrnná ratingová stupnice
- Příloha č. 2:      S&P Credit Ratings Table – převodní tabulka
- Příloha č. 3:      Grafy kurzů akcií vybraných společností za rok 2013
- Příloha č. 4:      Grafy kurzů akcií společností ČEZ, BCOM A BAK za období  
leden 2010 – 27. únor 2015
- Příloha č. 5:      Jarque-Bera test normality empirických výnosů akcií

**Příloha č. 1: Souhrnná ratingová stupnice**

Moody's		S&P		Fitch		Hodnocení	Stupeň
Dlouhé období	Krátké období	Dlouhé období	Krátké období	Dlouhé období	Krátké období		
Aaa	P-1	AAA	A-1+	AAA	F1+	Nejvyšší kvalita	Investiční stupně
Aa1		AA+		AA+		Velmi kvalitní	
Aa2		AA		AA			
Aa3		AA-		AA-			
A1		A+	A-1	A+	F1+	Střední kvalita - vyšší	
A2		A		A			
A3	P-2	A-	A-2	A-	F2	Střední kvalita - nižší	
Baa1		BBB+		BBB+			
Baa2	P-3	BBB	A-3	BBB	F3		
Baa3		BBB-		BBB-			
Ba1	Not Prime Subprime	BB+	B	BB+	B	Spekulativní	Spekulativní stupně
Ba2		BB		BB		Vysoce spekulativní	
Ba3		BB-		BB-			
B1		B+		B+			
B2		B		B			
B3		B-		B-			
Caa1		CCC+	C	CCC+	C	Značná rizika	
Caa2		CCC		CCC		Extrémně spekulativní	
Caa3		CCC-		CCC-		S velmi nízkou perspektivou	
Ca		CC		CC			
C		C	D	C	D	Velmi vysoká pravděpodobnost selhání	
		CI		D			
		D					

Zdroj: S&P [2014], FITCH [2014], MOODY'S [2014], vlastní zpracování



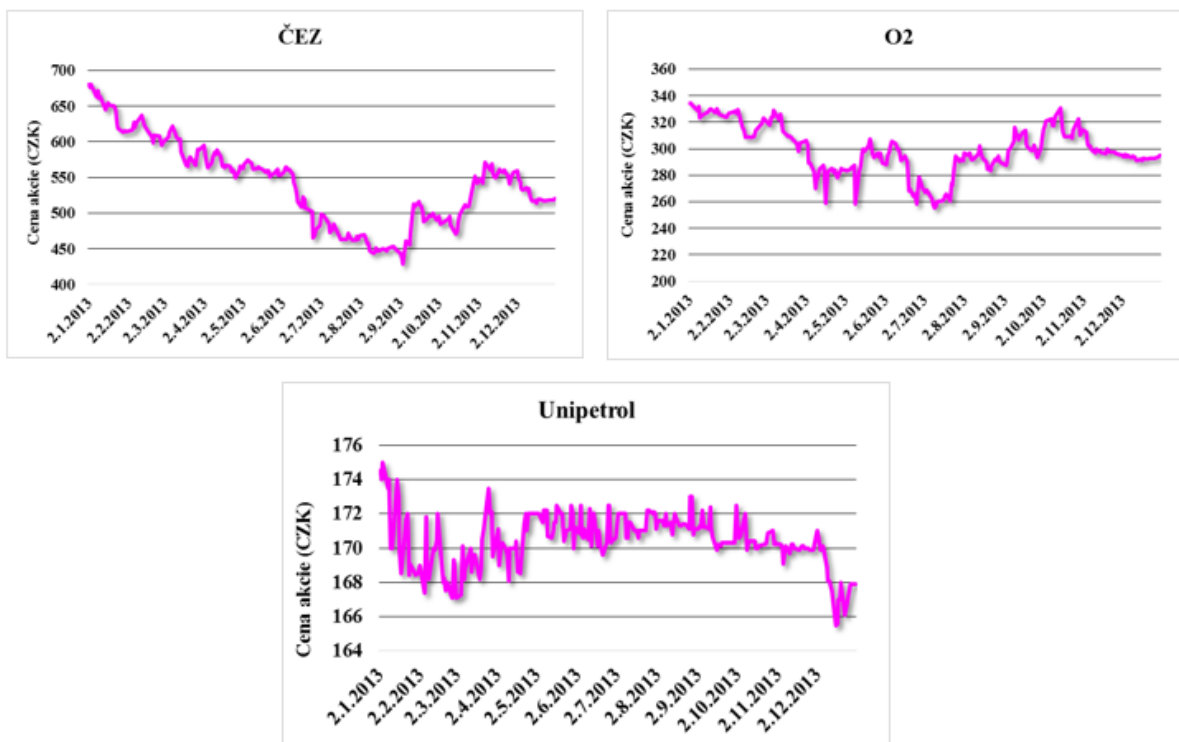
**Příloha č 2: S&P Credit Ratings Table – převodní tabulka**

<b>S&amp;P Rating</b>	<b>PD Value (%)</b>
<b>AAA</b>	(0.00 - 0.02]
<b>AA+</b>	(0.02 - 0.03]
<b>AA</b>	(0.03 – 0.04]
<b>AA-</b>	(0.04 – 0.05]
<b>A+</b>	(0.05 – 0.07]
<b>A</b>	(0.07 - 0.09]
<b>A-</b>	(0.09 – 0.14]
<b>BBB+</b>	(0.14 – 0.21]
<b>BBB</b>	(0.21 – 0.31]
<b>BBB-</b>	(0.31 – 0.52]
<b>BB+</b>	(0.52 – 0.86]
<b>BB</b>	(0.86 – 1.43]
<b>BB-</b>	(1.43 – 2.03]
<b>B+</b>	(2.03 – 2.88]
<b>B</b>	(2.88 – 4.09]
<b>B-</b>	(4.09 – 6.94]
<b>CCC+</b>	(6.94 – 11.78]
<b>CCC</b>	(11.78 – 14.00]
<b>CCC-</b>	(14.00 – 16.70]
<b>CC</b>	(16.70 – 17.00]
<b>C</b>	(17.00 – 18.25]
<b>D</b>	(18.25 – 20.00]

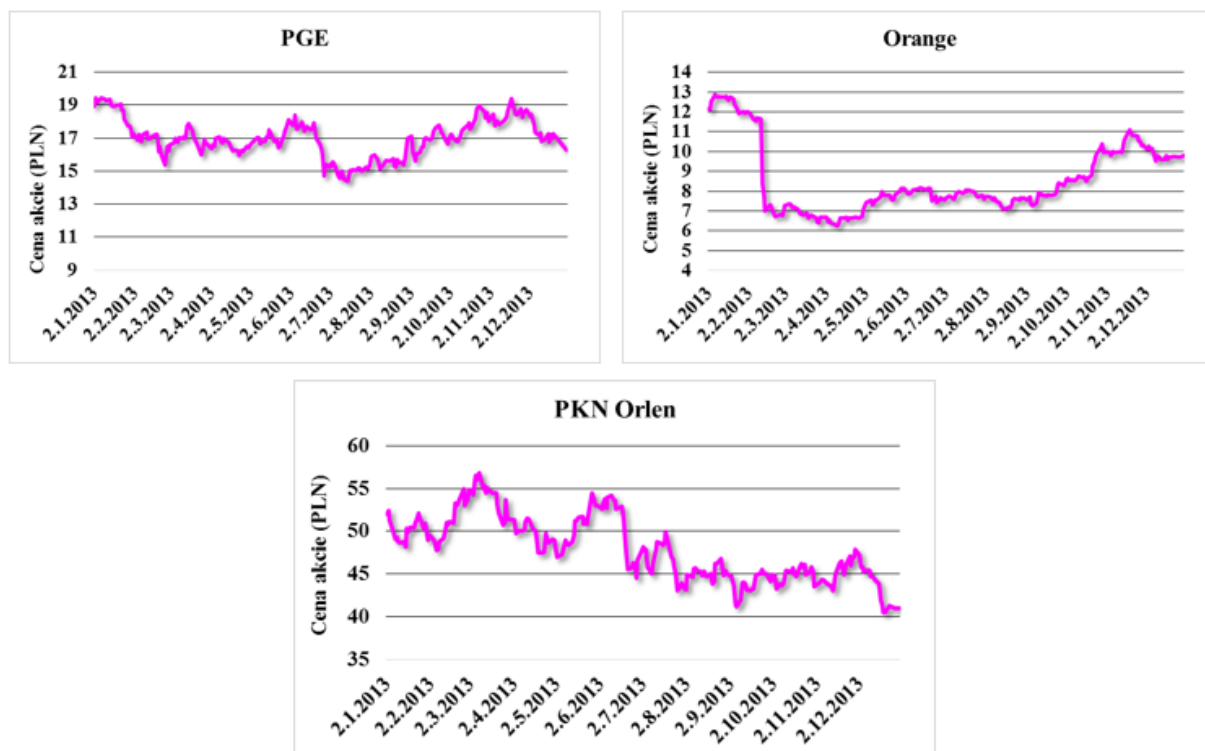
*Zdroj:* FEATHERSTONE, A., L. ROESSLER and P. BARRY. (2006, p. 18)

### Příloha č. 3: Grafy kurzů akcií vybraných společností za rok 2013

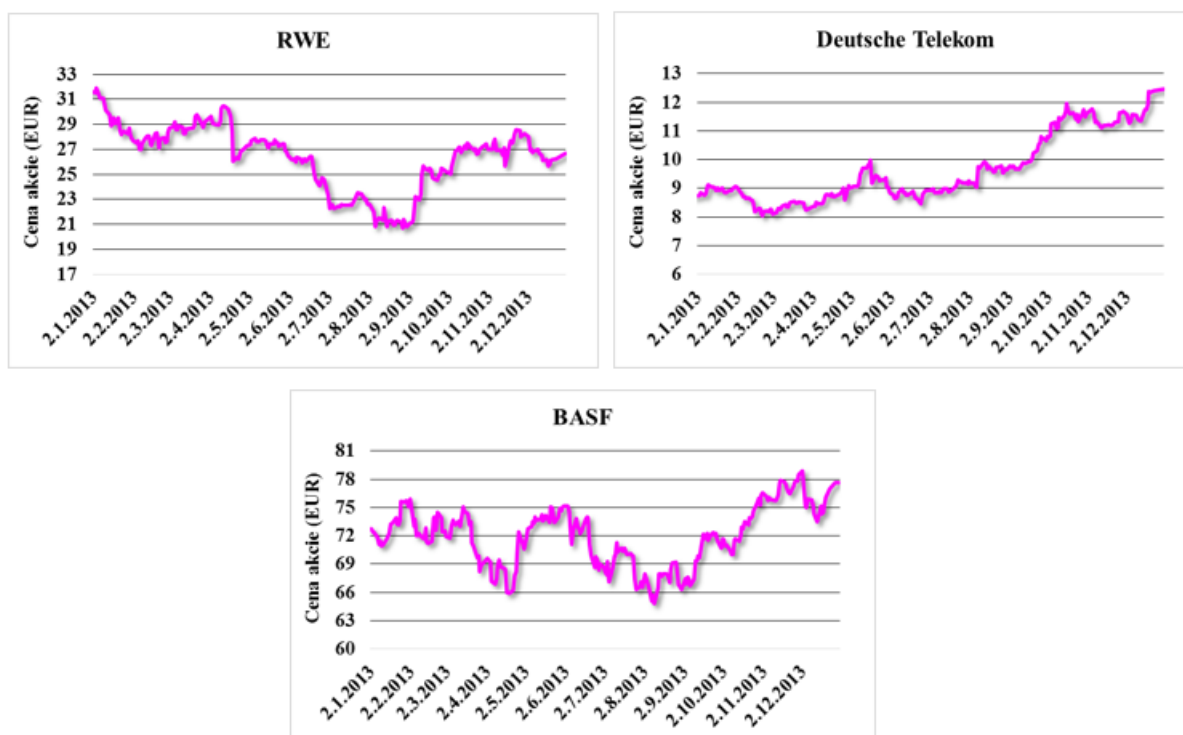
Obr.1: Grafy vývoje kurzů českých společností



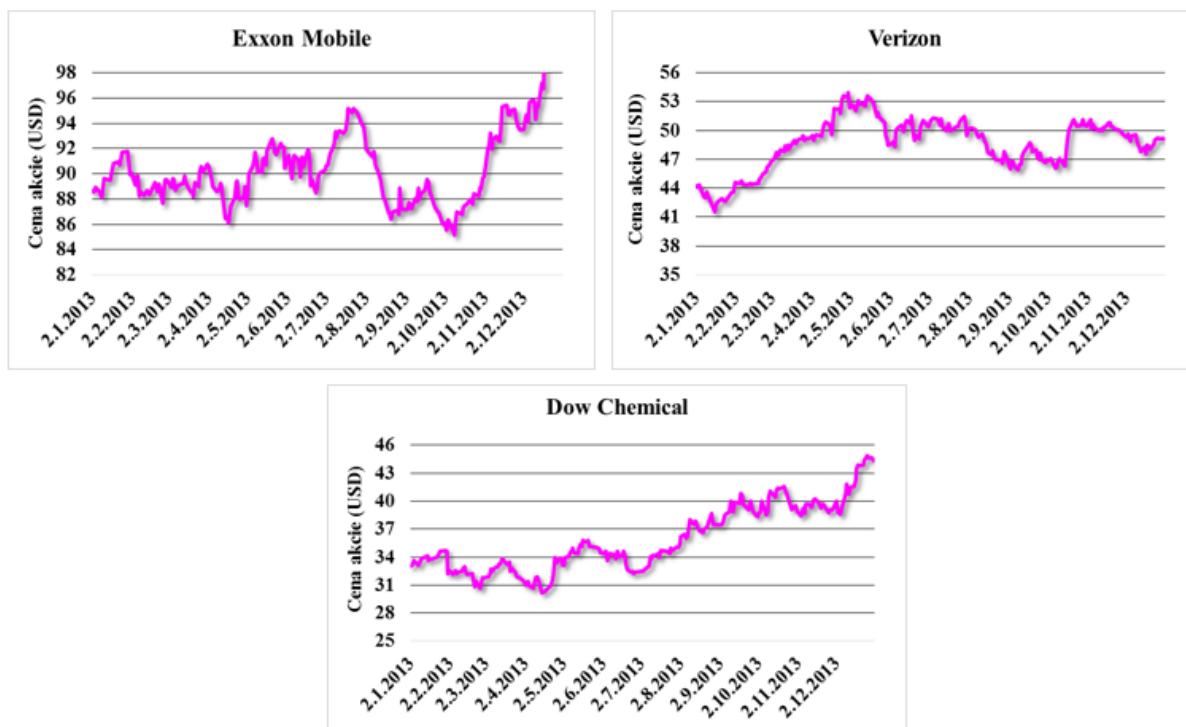
Obr.2: Grafy vývoje kurzů polských společností



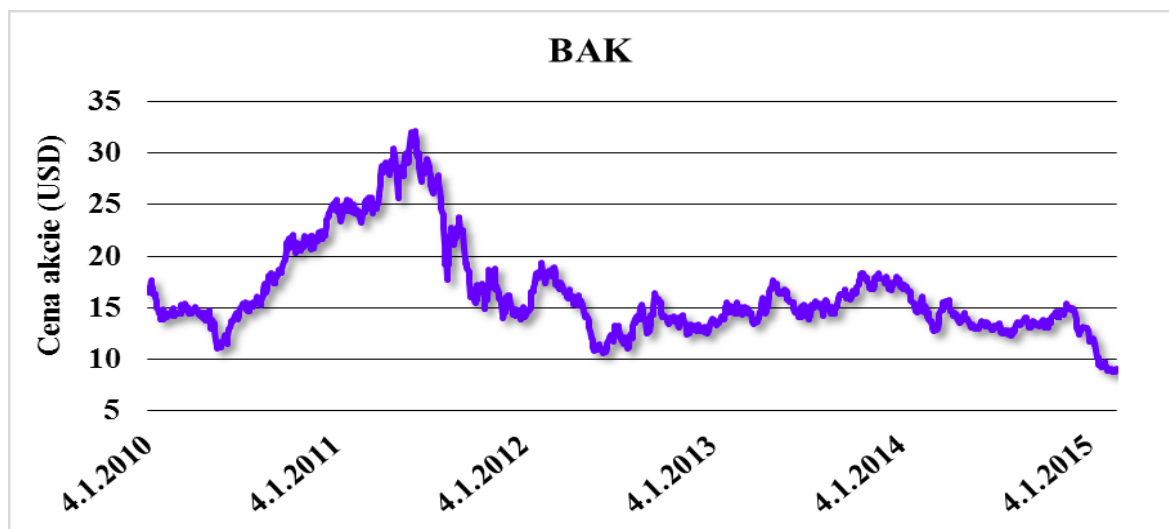
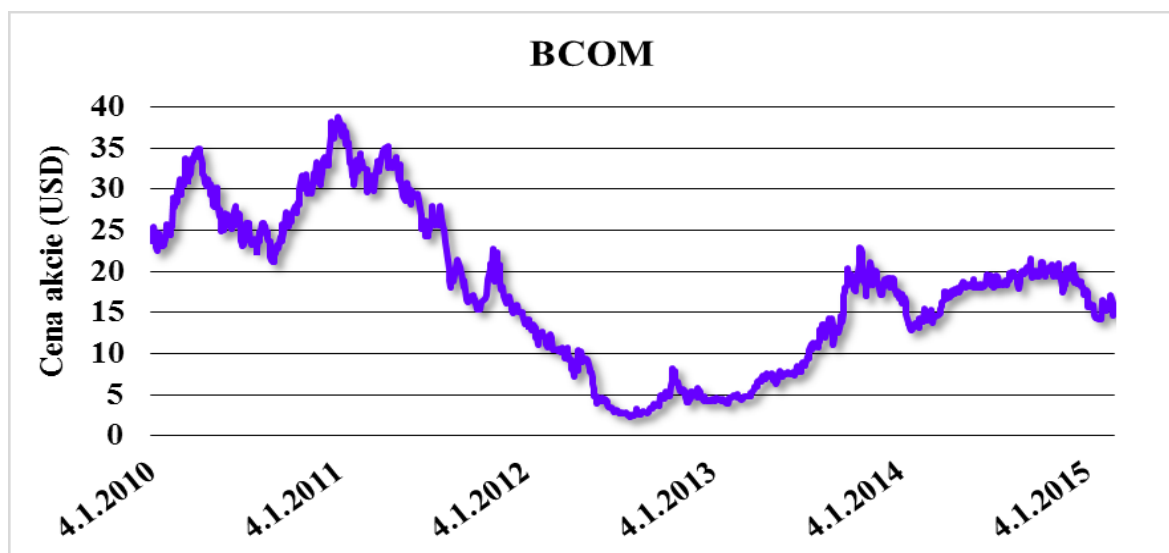
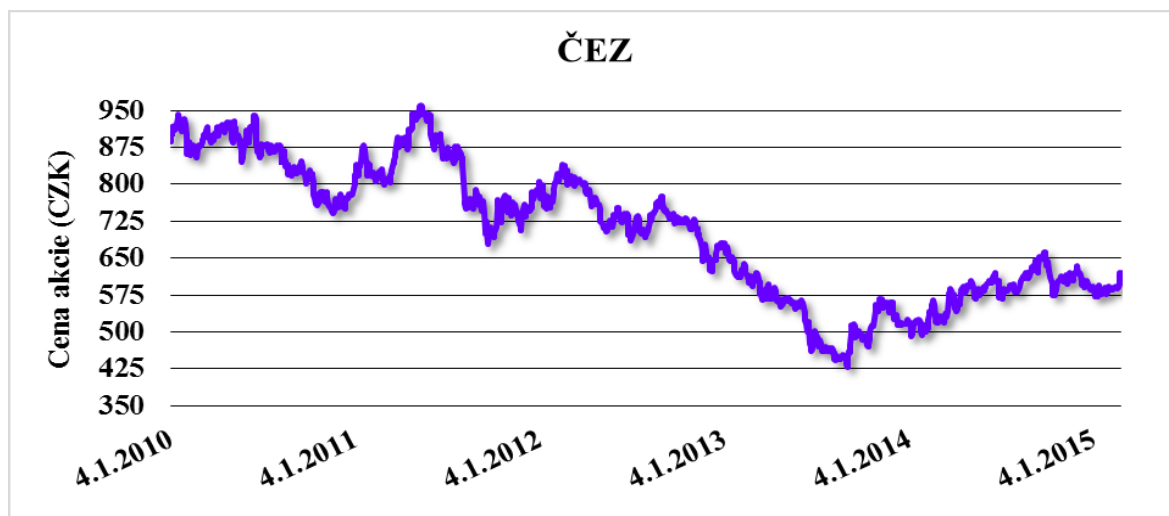
Obr.3: Grafy vývoje kurzů německých společností



Obr.4: Grafy vývoje kurzů amerických společností



**Příloha č. 4: Grafy kurzů akcií společností ČEZ, BCOM A BAK za období leden 2010 – 27. únor 2015**



## Příloha č. 5: Jarque-Bera test normality empirických výnosů akcií

### 1. Formulace hypotéz:

$H_0$ : Empirická data (empirické výnosy) pocházejí z normálního rozdělení.

$H_1$ : Empirická data (empirické výnosy) nepocházejí z normálního rozdělení.

### 2. Výpočet Jarque-Bera statistiky, která má pro velké výběry chí-kvadrát rozdělení:

$$JB = N \cdot \left[ \frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right] \approx \chi^2_{\alpha, df=2},$$

kde  $S$  je šikmost a  $K$  špičatost.

### 3. Vyslovení rozhodovacího pravidla, při jehož platnosti se zamítá hypotéza $H_0$ :

$$JB > \chi^2_{\alpha, df} = \text{CHIINV}(\alpha = 0.05; df = 2),$$

$$\text{CHIINV}(0.05; 2) = 5.99.$$

### 4. Provedení testu pro jednotlivé společnosti (software SPSS):

#### Společnost ČEZ

$$JB = 1297 \cdot \left[ \frac{(-0.323)^2}{6} + \frac{(3.212-3)^2}{24} \right] = 24.981$$

$24.981 > 5.99 \rightarrow H_0$  zamítnuta, data nejsou normálně rozdělena

#### Společnost BCOM

$$JB = 1105 \cdot \left[ \frac{(0.579)^2}{6} + \frac{(4.494-3)^2}{24} \right] = 164.507$$

$164.507 > 5.99 \rightarrow H_0$  zamítnuta, data nejsou normálně rozdělena

### Společnost BAK

$$JB = 1296 \cdot \left[ \frac{(-0,095)^2}{6} + \frac{(1,792-3)^2}{24} \right] = 80,750$$

$80,750 > 5,99 \quad \rightarrow H_0$  zamítnuta, data nejsou normálně rozdělena